

A UTILIZAÇÃO DO ESCALONAMENTO NA RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES

Aparecida Santana Chiari¹

José Luiz Magalhães de Freitas

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

RESUMO: Este artigo refere-se a uma pesquisa, em nível de Mestrado, que tem por objetivo investigar a utilização do escalonamento na resolução de sistemas lineares por alunos do segundo ano do Ensino Médio. Os dados utilizados serão coletados a partir da observação de situações de estudo e da análise da produção de alunos que atuarão sobre uma sequência didática que está sendo elaborada e analisada. O referencial teórico para análise é a Teoria das Situações Didáticas, proposta por Guy Brousseau, e no que concerne à parte metodológica nos inspiramos na Engenharia Didática para materializar a pesquisa. Como resultado, esperamos que nossa sequência atinja o objetivo de identificar e analisar alguns possíveis entraves e superações pelos alunos participantes do projeto de pesquisa, bem como promover aprendizagens referentes a esse.

Palavras-chave: Educação Matemática. Aprendizagem. Escalonamento.

Introdução e Justificativas

O ensino de matemática nas escolas, não raro, segundo Pantoja (2008), tem provocado nos estudantes aversão quanto ao estudo dos saberes inerentes à ciência matemática. Isso pode, claramente, influenciar o desempenho dos alunos. Provas como o SAEB, ENEM, PISA etc. podem comprovar essa afirmação. Segundo o site do INEP, Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais, o último PISA, Programa Internacional de Avaliação de Alunos, constatou que o Brasil encontra-se em 54º lugar em conhecimento matemático num ranking de 57 países.

Nesse sentido, iniciamos uma investigação de dificuldades e sucessos dos alunos diante de uma sequência de atividades sobre um conteúdo matemático específico que, no nosso caso, trata-se de Sistemas de Equações Lineares, o qual é abordado, normalmente, no segundo ano do Ensino Médio.

Vale destacar, já que mencionamos o Ensino Médio, que esta etapa da educação básica foi escolhida, como recorte para esta pesquisa, pelo fato de haver um número muito menor de livros didáticos para o Ensino Médio que exploram ou propõem atividades que envolvam diferentes contextos e abordagens do que livros destinados ao Ensino Fundamental. Segundo Lima (2001), o livro didático é, na maioria dos casos, a única fonte de referência com que

¹ Pesquisa financiada pela CAPES

conta o professor para organizar suas aulas, e, até mesmo, para firmar seus conhecimentos e dosar a apresentação que fará em classe.

Na busca de justificativas para as dificuldades encontradas pelos alunos com relação ao tema matemático escolhido, nossas experiências pessoais, como Professora de Matemática, começaram a se confirmar. Falando em primeiro lugar do tema amplo, a álgebra, Kieran apud Jamal (2004) sugere que três fatores são potenciais contribuintes para as dificuldades que o estudante tem em aprender álgebra: aprendizagem, ensino e conteúdo, entretanto não nos detalharemos nesses fatores por não ser o objetivo deste texto.

No que concerne ao conteúdo matemático, optamos por sistemas de equações lineares pelo fato de, entre outros fatores, constituir uma importante aplicação à área computacional, que está em evidência no momento. Além disso, esse assunto acompanhou o desenvolvimento da humanidade, instigando matemáticos a criarem métodos para resolvê-los, como aponta Luccas (2004). De acordo com essa autora, foram encontrados e analisados dois registros de 300 e 200 anos antes de Cristo em que já apareciam problemas matemáticos nos quais algumas sentenças são revertidas por meio de linguagem simbólica matemática em equações. Esse assunto, hoje, é conhecido como Sistema de Equações Lineares.

Deste trecho do trabalho acima citado, acreditamos que venha mais uma justificativa da pertinência e importância do assunto matemático escolhido para a pesquisa e, de uma forma mais geral, para o homem, que desde tempos muito remotos já investigava métodos de resolução de sistemas lineares.

Voltando nossas atenções agora para as dificuldades dos alunos referentes ao tema matemático específico do trabalho, Herrero, *apud* Pantoja (2008), apontou algumas dificuldades que os alunos apresentam quando estudam Sistemas Lineares:

- Dificuldades em usar operações aritméticas elementares para resolver problemas verbais envolvendo Equações e Sistemas de Equações;
- Dificuldade em converter a linguagem escrita para uma linguagem matemática;
- Os alunos não costumam verificar as respostas encontradas durante o processo de resolução dos Sistemas e, por isso, não têm clareza do que elas representam.

(p. 19)

Para a autora, essas dificuldades apresentam diversas origens, dentre as quais destaca a complexidade matemática segundo a qual são tratados os elementos básicos que são usados para resolver os Sistemas Lineares, a forma abstrata como o conceito de sistemas lineares é trabalhado aliada à não interpretação do significado das soluções encontradas pelos alunos e à ruptura entre o pensamento aritmético e algébrico empregado no ensino de sistemas, além de outras mais.

São conhecidos alguns métodos de resolução de sistemas lineares, conforme Battaglioli (2008), dentre os quais podemos citar o da adição, eliminação de Gauss, conhecido por método do escalonamento, substituição, regra de Cramer, que utiliza determinantes, entre outros. Sobre isso, Pantoja (2008) afirma que:

o estudo de sistemas no ensino básico e mais precisamente no ensino médio se restringe ao emprego de técnicas oriundas do estudo prévio de matrizes sem conexão com as técnicas estudadas no ensino fundamental, quebrando a seqüência desejável de construção do conhecimento matemático.

(p. 18)

Assim, entendemos que o Ensino Médio prioriza essencialmente a Regra de Cramer como método de resolução de sistemas lineares. Este fato se confirma por meio do que observamos em nosso início de análise de livros didáticos, percebendo a ênfase que é dada a esta regra, deixando o escalonamento, por exemplo, normalmente para o final do capítulo que contempla este conteúdo ou, às vezes, nem o mencionando.

Todavia, no desenvolvimento histórico deste conteúdo, sistemas lineares eram resolvidos sem ao menos mencionar-se os conceitos relacionados a determinantes. Segundo Iezzi, *apud* Battaglioli (2008), provavelmente os chineses foram os primeiros a resolver um sistema linear de forma sistemática, por volta do século III a.C. Mas, segundo Battaglioli (2008), foi somente em 1683 que a ideia de determinante veio à luz, num manuscrito do japonês Kowa, considerado o maior matemático japonês do século XVII.

Dentre as técnicas de resolução, nossa pesquisa terá como foco o uso do escalonamento. Vemos esse método como procedimento eficaz, que resolve todo tipo de sistema linear, o que não acontece com a regra de Cramer, por exemplo, que pode ser aplicada somente para os casos em que a matriz associada ao sistema linear é quadrada e seu determinante diferente de zero.

Com relação a isso, Lima (2001) afirma que

os determinantes ocorreram historicamente como um instrumento para resolver sistemas de equações lineares [...]. Entretanto, há séculos já se sabe que, como processo de cálculo, os determinantes são extremamente ineficazes [...]. Para dar uma idéia da situação, imaginemos um computador [...] capaz de efetuar um milhão de multiplicações ou divisões por segundo [...]. Se tivéssemos um sistema (linear) 20x20, a Regra de Cramer requereria 2 milhões, 745 mil e 140 anos para obter a solução! O método de escalonamento usaria apenas 6 milésimos de segundo para resolver o sistema.

(p. 27)

Esta afirmação aponta para as potencialidades do escalonamento, que é computacionalmente mais rápido e, de uma maneira geral, mais eficaz e mais abrangente.

Objetivos

Com base nessas justificativas, e por acreditarmos que o conhecimento não é algo pronto que possa ser repassado, mas sim dinâmico, que está em construção, e que, além disso, essa construção é um processo que deve ser realizado principalmente pelo aluno, onde o professor tem o papel importante, mas não principal, de mediar essa construção e propor situações que favoreçam que isso aconteça, nos questionamos sobre **quais situações podem contribuir para que os alunos construam o processo do escalonamento visando a resolução de sistemas lineares**. Ou seja, como esse processo pode ser construído, pelos alunos, por meio da exploração de situações que envolvam esse conteúdo matemático?

Com a finalidade de encontrar resposta para nossa questão norteadora, e ainda com base nas justificativas apresentadas, fomos levados a definir o seguinte objetivo geral de pesquisa: **investigar o uso do escalonamento na resolução de sistemas lineares por alunos do ensino médio**.

Em consequência, para responder o objetivo geral, elencamos três objetivos específicos. Em primeiro lugar, pretendemos **identificar e analisar estratégias utilizadas pelos alunos para resolver sistemas lineares**, pois acreditamos ser necessário conhecer o que os alunos sabem e, a partir disso, propor atividades que permitam que eles construam novos conceitos e os incorporem ao seu conhecimento prévio; dessa forma, acreditamos reduzir o risco de que eles apenas reproduzam uma técnica sem entender os procedimentos que efetuam.

Em segundo lugar, pretendemos **investigar a elaboração das transformações elementares para a obtenção de sistemas lineares equivalentes por alunos do ensino médio**, pois queremos descobrir se os alunos compreendem que as transformações elementares transformam os sistemas em outros equivalentes, não alterando, dessa forma, a solução. De posse dessa compreensão, conjecturamos que os alunos sejam capazes de utilizar as transformações elementares visando o escalonamento do sistema linear.

Em terceiro lugar, pretendemos **analisar dificuldades e superações encontradas pelos alunos no uso das transformações elementares para resolver sistemas lineares**. Temos como hipótese de pesquisa que, sabendo utilizar adequadamente as transformações elementares, os alunos serão capazes de elaborar o processo de escalonamento a fim de obter sistemas lineares equivalentes aos propostos, entretanto na forma escalonada, cuja resolução é trivial. É esperado que à medida que esse processo vai sendo construído, os alunos passarão por fases de erros e superações e, a partir da análise dos mesmos, seremos capazes de verificar se ocorreram aprendizagens referentes a esse conteúdo matemático.

Referencial Teórico-Metodológico

Para responder os objetivos específicos e, por conseguinte, o objetivo geral, nos apoiaremos nas ideias e conceitos da Teoria das Situações Didáticas, proposta por Guy Brousseau. Segundo Freitas (2008), essa teoria trata de formas de apresentação, a alunos, do conteúdo matemático, possibilitando melhor compreender o fenômeno da aprendizagem da Matemática.

O autor ainda coloca que, segundo essa concepção, o professor deve efetuar não a simples comunicação de um conhecimento, mas devolução de um bom problema. Entendemos por devolução o ato dos alunos aceitarem “entrar no jogo”, ou seja, tomarem o problema proposto pelo professor como se fosse um desafio pessoal.

Garantida a devolução, os alunos passam por algumas etapas que constituem as situações adidáticas. Vale ressaltar que essas etapas não estão separadas de forma clara, o que se observa são momentos em que uma ou outra etapa se evidencia e o que está sistematizado neste texto não acontece seguindo a mesma ordem de apresentação nem de separação.

Brousseau (2008) afirma que uma situação didática é entendida como o entorno do aluno, que inclui tudo o que especificamente colabora no componente matemático de sua formação.

Como parte integrante da situação didática, destacamos as situações adidáticas, que são aquelas em que a intenção de ensinar não é revelada ao aluno. Segundo Freitas (2008), o professor prepara, organiza a situação e tem o controle sobre o andamento dela, não do saber, para que os alunos possam vivenciá-la como se fossem pesquisadores que buscam a solução sem a ajuda do mestre.

É importante mencionar as situações de ação, formulação e validação que são tipos de situações ou fases adidáticas. Entendemos que na fase de ação o aluno irá se familiarizar com a situação proposta e que ainda não possua nenhuma conjectura ou formulação quanto às possíveis formas de resolução, entretanto esta fase deve possibilitar que o aluno busque sua solução sem a intervenção do professor.

Na fase de formulação, o aluno troca informações com outros colegas e começa a estruturar regras, novas ou não, que utilizou para resolver o problema. Ele apresenta alguns modelos teóricos mais elaborados que na fase de ação, utilizando, para se comunicar, uma linguagem clara para todos. Além disso, faz determinadas afirmações sobre sua ação, mas sem a intenção, ainda, de que essas afirmações tenham validade em casos gerais.

Na fase de validação, o aluno tenta provar o que afirmou ou conjecturou na fase de formulação, ou seja, deve mostrar que seu modelo é válido, submetendo-o à apreciação de um

interlocutor. Ele justifica as razões pelas quais construiu tal modelo e apresenta uma validação para a mesma. O ouvinte pode pedir mais explicações ou rejeitar outras com as quais discorda e dessa forma, o debate serve como meio de estabelecer provas ou descartá-las.

Finalmente, na fase de institucionalização, que não é adidática, o professor volta à cena para oficializar o saber matemático em questão. Ele institucionaliza as novas regras e sistematiza o que os alunos já formularam. Isso é necessário para que o aluno reconheça o conhecimento matemático ali presente como um saber novo, aceito culturalmente. Aqui os protagonistas do processo são ambos, aluno e professor, diferente das outras fases (adidáticas) em que o aluno era o ator principal.

Para garantir a devolução e o aparecimento de situações adidáticas, iremos propor aos alunos algumas situações-problema envolvendo sistemas lineares para que eles interajam e formulem respostas aos nossos questionamentos. Trabalharemos para que essas situações tenham ligação com contextos familiares para os alunos, com o objetivo de que ele “entre no jogo”. Com a finalidade de estruturar um modelo para apresentação dessas situações, tomaremos como inspiração elementos e conceitos da Engenharia Didática, metodologia de pesquisa que consiste em um processo empírico, no sentido que deve extrair os dados da realidade e os comparar às hipóteses levantadas no início do trabalho, conforme Machado (2008).

Nesse sentido, uma de nossas hipóteses é a de que os alunos são capazes de construir o processo do escalonamento à medida que interagem com situações elaboradas nos preceitos da teoria escolhida e propostas com esse objetivo.

Segundo Machado (2008), essa metodologia se constituiu com a finalidade de analisar as situações didáticas e, portanto, se insere nesse quadro teórico da Didática da Matemática. Distinguimos quatro fases da Engenharia Didática, a saber: análises preliminares, concepção e análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori* e validação.

Nas análises preliminares, ou análises prévias, buscamos identificar os problemas de ensino e aprendizagem de Álgebra e, em particular, de Sistemas Lineares e esboçar, sempre justificando cada escolha, a estrutura da pesquisa. Dentro das análises preliminares, podemos destacar alguns procedimentos que serão acatados.

Em primeiro lugar, estudamos a organização matemática da álgebra e de seu subtópico que mais nos interessa, os sistemas lineares. Tentamos entender a evolução histórica do mesmo, sua estrutura e suas funcionalidades matemáticas, sempre considerando os objetivos específicos de nossa pesquisa.

Em segundo lugar, analisamos a organização didática de nosso conteúdo, levantando o que os documentos oficiais sugerem sobre o conteúdo em questão, estudando a evolução do tratamento dado ao conceito de sistemas lineares, analisando livros didáticos e destacando variáveis didáticas que o autor levou em consideração. Entendemos por variável didática tudo que está sob o controle do professor e que pode alterar as estratégias com as quais o aluno resolve as situações-problema propostas.

Procuramos, ainda, referências bibliográficas sobre os fatores que interferem no processo de ensino e de aprendizagem de álgebra, particularmente de sistemas lineares (artigos, teses, dissertações etc.). Na realidade, já nos encontramos nessa fase e iniciamos essas análises e estudos, entretanto esse processo é extremamente dinâmico e continuará durante todas as etapas da pesquisa.

A fase de concepção e análise *a priori* caracteriza-se, inicialmente, pela construção de uma sequência de situações-problema que serão aplicadas com os alunos participantes a fim de responder ao problema da pesquisa e validar as hipóteses levantadas nas análises preliminares. Também já estamos trabalhando na construção dessa sequência.

Além disso, identificamos algumas variáveis didáticas que iremos considerar. Na análise *a priori*, devemos mostrar como as variáveis em jogo podem alterar o comportamento dos alunos.

A experimentação é a fase em que colocamos em prática as situações-problema construídas na análise *a priori* e retornamos a ela sempre que necessário, para corrigir e complementar o que foi elaborado previamente.

A fase de análise *a posteriori* e validação caracteriza-se pelo tratamento dos dados colhidos na experimentação e da produção dos alunos dentro ou fora da sala de aula, com os quais se faz uma validação, ou não, das hipóteses levantadas no início do trabalho. Tal validação é feita pela confrontação, a partir desses dados, das análises *a priori* e *a posteriori*.

Resultados Esperados

Neste trabalho apresentamos nossas justificativas para a escolha do objeto de estudo aqui exposto, os objetivos geral e específicos, com base em algumas leituras feitas e tratamos dos referenciais teórico e metodológico que estão sendo utilizados. Neste momento, estamos em fase de escolha do local para a aplicação da sequência didática que estamos construindo e analisando.

Concluindo, esperamos que nosso objetivo seja atingido, ou seja, que a experimentação que pretendemos realizar promova a aprendizagem de elementos importantes desse conteúdo

por alunos participantes do projeto. Além disso, esperamos que a sequência possa servir de subsídio para outros professores de Matemática que atuam no Ensino Médio, contribuindo como mais uma fonte para a elaboração de seus planos de aula.

Referências Bibliográficas

- ARTIGUE, M. Engenharia Didáctica. In: BRUN, J. (org). *Didáctica das Matemáticas*. Lisboa: Instituto Piaget, 1996.
- BATTAGLIOLI, C.S.M. *Sistemas Lineares na Segunda Série do Ensino Médio: Um olhar sobre os Livros Didáticos*. 2008. 114p. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - PUC, São Paulo.
- BRASIL (País), Secretaria de Educação Básica. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio: Matemática*. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- BRASIL (País), Secretaria de Educação Básica. *Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- BROUSSEAU, G. *Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas. Conteúdos e métodos de ensino*. São Paulo: Ática, 2008.
- FREITAS, J.L.M. Teoria das Situações Didáticas. In: MACHADO, S.D.A. (Org.) *Educação Matemática: uma (nova) introdução*. São Paulo: EDUC, 2008. p. 77-112.
- JAMAL, R.M. *Álgebra na Educação Básica: as Múltiplas Sinalizações do que se Espera que Devem Saber os Alunos*. 2004. 142 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – PUC – SP, São Paulo.
- LIMA, E.L, ed. *Exame de Textos: Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio*. Rio de Janeiro: VITAE/IMPA/SBM, 2001.
- LUCAS, S. *Abordagem histórico-filosófica na educação matemática: Apresentação de uma proposta pedagógica*. 2004. 222p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - UEL, Londrina.
- MACHADO, S.D.A. Engenharia Didática. In: MACHADO, S.D.A. (Org.) *Educação Matemática: uma (Nova) Introdução*. São Paulo: EDUC, 2008. p. 233-248.
- PANTOJA, L.F.L. *A conversão de Registros de Representações Semióticas no Estudo de Sistemas de Equações Algébricas Lineares*. 2008. 105p. Dissertação de Mestrado do em Educação em Ciências e Matemáticas do Núcleo de Pesquisa e Desenvolvimento da Educação Matemática e Científica – Universidade Federal do Pará, Belém.
- www.inep.gov.br, acessado em 20/09/2009.