A TRANSPOSIÇÃO DO SABER CIENTÍFICO *GEOMETRIA FRACTAL* PARA O SABER A ENSINAR

Edilson de Moura

Antônio Pádua Machado

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

RESUMO: O objetivo deste artigo é compreender e estudar a trajetória percorrida por esse saber científico – fractal – até o saber a ensinar – livros didáticos, programas e outros materiais de apoio. A teoria fractal vem se desenvolvendo como conceito da matemática desde 1975, pelas tentativas do matemático, polonês Benoit Mandelbrot, de representar certas formações da natureza. As abstrações do autor partem de situações observáveis como os litorais, as nuvens, as ramificações em árvores e passam por aplicações tecnológicas, como em antena de rádio, leitura de frequência cardíaca, distribuição vegetal na floresta. Há hoje variados estudos acadêmicos sobre fractais, nos campos científicos da matemática, de outras ciências e no campo da Educação Matemática. Nos próprios Parâmetros Curriculares Nacionais há, desde 1998, orientação para inclusão pedagógica desse conceito no ensino de matemática. Dada a naturalidade do pensamento geométrico em situações que dão a abstração fractal, usa-se a expressão Geometria Fractal, que ficou estabelecida comumente como a área de estudo na nova matemática da complexidade. Essa nova matemática da complexidade é tecnicamente conhecida como teoria dos sistemas dinâmicos que não é uma teoria dos fenômenos físicos, mas sim, uma teoria matemática, assim como a teoria do caos e a teoria dos fractais. A Geometria Fractal dá uma forma extremamente precisa, de olhar para o mundo em que vivemos e em particular o mundo vivo. Os fractais não são apenas desenhos artísticos, mas os primeiros passos de uma nova ciência. Este artigo é fruto de uma pesquisa que está sendo desenvolvida, cuja metodologia adotada como estratégia de pesquisa é o Estudo de Caso e para fundamentações teóricas emprega-se a terminologia da Transposição Didática.

PALAVRAS-CHAVE: Fractais. Estudo de Caso. Educação Matemática.

1. CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A transposição didática estuda o processo seletivo que ocorre entre "(...) *três tipos de saberes: o saber científico, o saber a ensinar e o saber ensinado.*" (Machado, 2008, p. 21).

Neste artigo trataremos os fractais como um saber científico que se movimenta para o saber escolar. Nesse sentido, entendemos que o tipo de transposição didática é a externa, a qual se materializa, geralmente, pelos livros didáticos, pelas orientações curriculares ou outros materiais de apoio. Já a *transposição didática interna*, a qual se apresenta geralmente particularizada em cada sala de aula, não será abordada. Essa transposição didática interna representa o momento em que cada professor vai transformar os conteúdos que lhes foram designados em conhecimentos a serem efetivamente ensinados.

[1] Autor, Mestrando do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS, Campo Grande, MS. Professor de Matemática do Colégio Militar de Campo Grande, MS. ediladri@ig.com.br

[2] Professor Doutor Orientador no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS, Campo Grande, MS.

Discutiremos a seguir alguns dos elementos, termos e conceitos vinculados tanto a transposição didática quanto a geometria fractal, a fim de proporcionar uma melhor compreensão de alguns dos textos destacados destes documentos oficiais: Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN); Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio (PCNEM); Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN^{+}); e Diretrizes Curriculares de Matemática do Estado do Paraná.

2. ELEMENTOS DO REFERENCIAL TEÓRICO

Falar na existência de uma transposição remete-nos a uma ideia de deslocamento de um ponto a outro. No sentido de transposição didática, entende-se que o objeto a ser transposto ou movimentado é o saber. Para Chevallard, autor da transposição didática, a transposição é definida como "*O trabalho que, de um objeto de saber a ensinar faz um objeto de ensino, (...)*." (*apud* Machado, 2008, p. 16).

Existe uma diferença entre saber e conhecimento. O saber é, "(...) *quase sempre, caracterizado por ser relativamente descontextualizado, despersonalizado e mais associado ao contexto científico, histórico e cultural.*" (Machado, 2008, p. 12). Enquanto o conhecimento está relacionado "(...) *ao contexto mais individual e subjetivo, revelando aspectos com os quais o sujeito tem uma experiência mais direta e pessoal.*" (Machado, 2008, p. 13).

Chevallard afirma que os saberes sofrem transformações adaptativas nos diversos transcursos ocorridos entre as instituições. Para ele "*um conteúdo do conhecimento, tendo sido designado como saber a ensinar, sofre então um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a tomar lugar entre objetos de ensino.*" (*apud* Machado, 2008, p. 15).

O termo noosfera, cunhada por Chevallard, refere-se às intervenções realizadas por professores, cientistas, especialistas, autores de livros e outros agentes da educação, sobre esses saberes que comporão os programas escolares e, por conseguinte determinarão o funcionamento do processo didático.

O saber científico não está diretamente vinculado ao ensino médio e fundamental, mas está relacionado normalmente ao saber desenvolvido nas universidades ou nos institutos de pesquisa. Sendo assim, há uma necessidade de promover transformações adaptativas, a fim de produzir um tratamento didático que possa ser destinado as práticas educativas. Pais (2008) diz que

> para viabilizar a passagem do saber científico para o saber escolar, torna-se necessário um trabalho didático efetivo, para proceder a uma reformulação visando à prática educativa, é necessário recorrer à elaboração de uma forma didática, surgindo assim a importância de uma metodologia fundamentada numa proposta pedagógica. (Machado, 2008, p. 23).

Para caracterizar a diferença entre o saber científico e o saber a ensinar, basta verificar a forma de comunicação intrassaber. Enquanto a primeira utiliza-se de artigos, teses, dissertações e livros especializados a outra se utiliza normalmente de livros didáticos, programas e outros materiais didáticos de apoio. Devemos ter o cuidado na transposição do saber científico para o saber ensinado, pois o conteúdo não pode ser concebido apenas como uma simplificação do saber científico.

Entre as instituições, que lidam com esses dois tipos de saberes, existem finalidades diferentes a serem alcançadas. Enquanto, para o matemático o saber é sua meta principal, para as práticas escolares o conhecimento é o meio para proporcionar a educação. Não queremos dizer com isso, que o pensamento do pesquisador matemático não tenha importância para educação, mas sim, como afirma Pais (2008) que

> o *trabalho intelectual* do aluno não é diretamente comparável com o trabalho do matemático ou do professor de matemática. Mesmo assim, essas atividades guardam entre si algumas correlações cuja análise é de interesse para a educação matemática. O aluno deve ser sempre estimulado a realizar um trabalho na direção de uma iniciação à "investigação científica". Nesse sentido, a atitude intelectual do aluno diante de um problema deveria ser semelhante ao trabalho do matemático diante de sua pesquisa. Aprender a valorizar sempre o espírito de investigação. Esse é um dos objetivos maiores da educação matemática, (...). (Machado, 2008, p. 31).

3. CONCEITO E ELEMENTOS DA TEORIA FRACTAL

Capra (2006, p. 118) afirma que "*essa geometria fornece uma convincente linguagem matemática para descrever a estrutura em "escala fina" dos atratores caóticos"*. O autor Stewart (1991, p. 122) define *"atrator como sendo uma porção do espaço de fase tal que qualquer ponto que se oponha em movimento nas suas proximidades se aproxima cada vez mais dele"*.

Capra (2006, p. 118) descreve que Mandelbrot, autor dessa nova linguagem, "*explicou que a geometria fractal lida com um aspecto da natureza do qual quase todos têm estado cientes, mas que ninguém foi capaz de descrever em termos matemáticos formais".*

No geral as formas geométricas da natureza carecem de uma linguagem mais apropriada para descrevê-las, as regularidades das formas da natureza são exceções, como nos lembra Mandelbrot:

> A maior parte da natureza é muito, muito complicada. Como se poderia descrever uma nuvem? Uma nuvem não é uma esfera. ... É como uma bola, porém muito irregular. Uma montanha? Uma montanha não é um cone. ... Se você quer falar de nuvens, de montanhas, de rios, de relâmpagos, a linguagem geométrica aprendida na escola é inadequada. (*apud* Capra, 2006, p. 118).

Um fractal é caracterizado pela *autossimilaridade;* por sua *dimensão* numericamente não inteira; e por um procedimento de *interação* que o gera.

Stewart (1991, p. 219) diz que um objeto "é *autossimilar quando se pode separar uma pequena parte, ampliá-la e recriar assim algo muito parecido com o todo.* Entendemos assim que há um padrão que se repete indefinidamente, ou seja, suas partes, em qualquer escala são semelhantes ao todo. São exemplos de autossimilaridade na natureza as pequenas rochas das montanhas; as ramificações de relâmpagos; linhas litorâneas que se dividem em porções progressivamente menores; pedaços de uma couve-flor que lembram toda a couve-flor; e outros mais. Queremos deixar claro que a autossemelhança da couve-flor se dá até certo grau de redução no fator de escala. Em um fractal natural há uma autossemelhança estatística, ou seja, há diferenças entre o fractal natural e o fractal matemático. Janos (2008) diz que "*nos fractais matemáticos, as partes são cópias exatas do todo, mas nos fractais naturais as partes são apenas reminiscência do todo."*

A *dimensão fractal* nada mais é do que uma medida numérica do grau de rugosidade ou irregularidade de um fractal. Stewart (1991, p. 236) disse que "*de início foi chamada de dimensão de Hausdoff-Besicovich, a partir dos nomes dos nomes dos matemáticos Felix Hausdorff e A. S. Besicovitch qua a inventaram e desenvolveram".*

Para Capra (2006, p. 119), Mandelbrot

> acentuou essa característica dramática das formas fractais fazendo uma pergunta provocativa: "Qual é o comprimento do litoral da Inglaterra?" Ele mostrou que, desde que o comprimento medido pode ser indefinidamente estendido se nos dirigirmos para escalas cada vez menores, não há uma resposta bem definida para essa pergunta. No entanto, é possível definir um número entre 1 e 2 que caracterize o "denteamento" do litoral. Para a costa britânica, esse número é aproximadamente igual a 1,58; para a costa norueguesa, muito mais acidentada, ele mede aproximadamente 1,70.

E ainda, Capra (2006, p. 119) esclarece melhor esse conceito da dimensão fractal, quando explica

> intuitivamente essa ideia compreendendo que uma linha denteada em um plano preenche mais espaço do que uma linha reta, que tem dimensão 1, porém menos do que o plano, que tem dimensão 2. Quanto mais denteada for a linha, mais perto de 2 estará sua dimensão fractal. De maneira semelhante, um pedaço de papel amarrotado ocupa mais espaço do que um plano, porém menos do que uma esfera. Desse modo, quanto mais amarrotado e apertado estiver o papel, mais perto de 3 estará sua dimensão fractal.

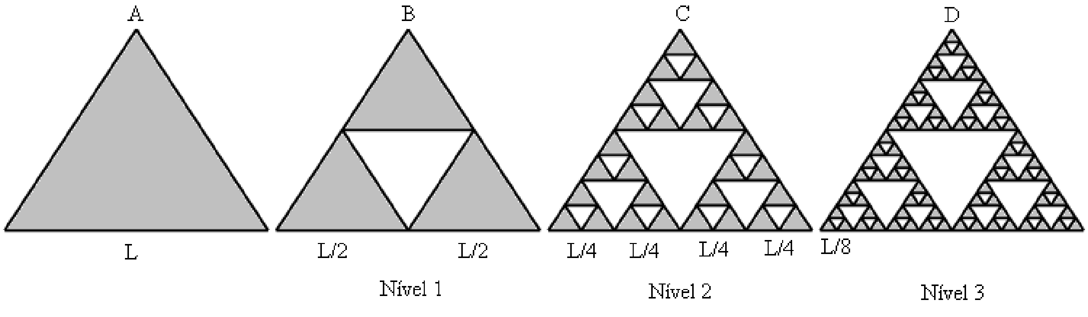
Para nós, entender o conceito de dimensão fractal não foi fácil, pois envolvia ideia de dimensão numericamente não inteira. Agora podemos perceber a importância desse conceito tão poderoso para essa geometria. Não só para a geometria fractal, esse conceito é vital, mas também para outros ramos das ciências que se utilizam dela, como afirma Capra (2006, p. 119):

> Esse conceito de dimensão fractal, que foi, de início, uma ideia matemática puramente abstrata, tornou-se uma ferramenta muito poderosa para analisar a complexidade das formas fractais, pois corresponde muito bem à nossa experiência da natureza. Quanto mais dentados forem os contornos de um relâmpago ou as bordas de uma nuvem, e quanto mais acidentadas forem as formas de uma linha litorânea e de uma montanha, mais altas serão suas dimensões fractais.

Para expurgar bem essa ideia do conceito de dimensão fractal, citaremos um exemplo adaptado do Barbosa (2005):

Dimensão em geral não inteira

O triângulo de Sierpinski



Cada triângulo de um nível é repartido para o nível seguinte em 3 triângulos (desde que o central seja removido), então n = 3; e cada um pode ser ampliado para se igualar ao anterior, duplicando-o, logo o fator de aumento é m = 2.

Usando a igualdade $n = m^D$, teremos $3 = 2^D$, e com logaritmos obtemos

$D = \log 3 / \log 2 \cong 0{,}47712 / 0{,}30103 \cong 1{,}585$

Diremos então que a dimensão do triângulo de Sierpinski é aproximadamente 1,585; portanto, entre os inteiros 1 e 2.

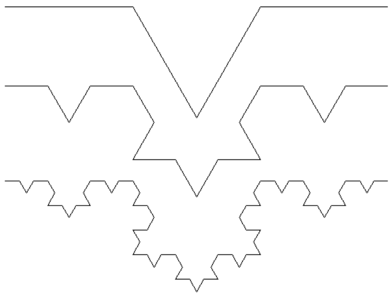
É interessante e importante observar que o resultado permanece o mesmo se tivermos repartido o triângulo em 9 (nove) triângulos (nível 2), pois nesse caso o fator de aumento é 4:

$9 = 4^D$ ou $D = \log 9 / \log 4 = 2 \log 3 / 2 \log 2 = \log 3 / \log 2$

Segue o uso da fórmula seguinte para determinar a dimensão dos fractais:

Dimensão = log (número de peças) / log (fator de aumento) ou **D = log n / log m**

Curva de Koch



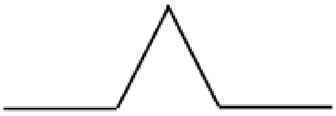
Para esse fractal temos n = 4 peças e fator de aumento m = 3, a sua dimensão fractal é

$$D = \log 4 / \log 3 \cong 0{,}60206 / 0{,}47712 \cong 1{,}262$$

Vamos exemplificar outro exemplo bem interessante com dois fractais do tipo de curvas de Koch com os geradores iniciais dados por:

a) ponta mais achatada,

b) ponta mais alongada



Usamos em ambos n = 4 peças como na curva de Koch padrão, e também ambos com comprimento total do segmento 3,5 unidades. Em a) cada peça tem 2/7 do total, porém em b) cada uma tem 2/5, valores respectivamente inferior e superior a cada peça da curva padrão de Koch, que possuem 1/3 do total. Com esses dados as respectivas dimensões são:

$D(a) = \log 4 / \log (3{,}5) \cong 0{,}60206 / 0{,}54407 \cong 1{,}106$

$D(b) = \log 4 / \log (2{,}5) \cong 0{,}60206 / 0{,}39794 \cong 1{,}512$

desde que os fatores de aumento são dados pelos inversos dos fatores de redução 1/(2/7) = 7/2 = 3,5 e 1/(2/5) = 5/2 = 2,5.

Cremos que intuitivamente podemos concluir que: a) é menos áspero e menos denso; enquanto b) é mais áspero e mais denso.

4. SABER ESCOLAR - PCN; PCNEM; PCN+; e as Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná.

O PCN diz que a matemática não evolui de forma linear e logicamente organizada, e ressalta que a matemática

> desenvolveu-se com movimentos de idas e vindas, com rupturas de paradigmas. Frequentemente um conhecimento foi amplamente utilizado na ciência ou na tecnologia antes de ser incorporado a um dos sistemas lógicos formais do corpo da Matemática. Exemplos desse fato podem ser encontrados no surgimento dos números negativos, irracionais e imaginários. Uma instância importante de mudança de paradigma ocorreu quando se superou a visão de uma única geometria do real, a geometria euclidiana, para aceitação de uma pluralidade de modelos geométricos, logicamente consistentes, que podem modelar a realidade do espaço físico. (PCN, 1998, p. 25)

Vemos que a geometria fractal faz parte desse contexto, pois esse conhecimento já vem sendo utilizado nos mais diversos ramos da ciência e suas tecnologias, como mencionado. É também um exemplo claro de que a matemática não está estagnada. A teoria fractal é um dos exemplos da multiplicidade dos sistemas matemáticos que

> evidenciou, por outro lado, que não há uma via única ligando a Matemática e o mundo físico. Os sistemas axiomáticos euclidiano e hiperbólico na Geometria, equivalentes sob o ponto de vista da consistência lógica, são dois possíveis modelos da realidade física. Além disso, essa multiplicidade amplia-se, nos tempos presentes, com o tratamento cada vez mais importante dos fenômenos que envolvem o acaso - a Estatística e a probabilidade – e daqueles relacionados com as noções matemáticas de caos e de conjuntos fractais. (PCN, 1998, p. 25)

Os estudos realizados até o momento permitem-nos perceber que a geometria fractal ajudará ao aluno a aprender a identificar diferenças, semelhanças e regularidades; desenvolvendo e estimulando no aluno um caráter indutivo. Na construção do conceito fractal, o conhecimento matemático se dá:

> a partir da observação de casos particulares, as regularidades são desvendadas, as conjecturas e teorias matemáticas são formuladas. Esse caráter indutivo é, em geral, pouco destacado quando se trata da comunicação ou do ensino do conhecimento matemático.
> O exercício da indução e da dedução em Matemática reveste-se de importância no desenvolvimento da capacidade de resolver problemas, de formular e testar hipóteses, de induzir, de generalizar e de inferir dentro de determinada lógica, o que assegura um papel de relevo ao aprendizado dessa ciência em todos os níveis de ensino. (PCN, 1998, p. 26)

Algumas pessoas acham que a matemática está muito longe da arte, mas a matemática está muito mais próxima da arte do que se pensa. Elas apenas utilizam linguagens diferentes. E na geometria, elas se revelam ainda mais próximas, pois nela o olhar e a matemática se encontram, e o:

> estudo da Geometria é um campo fértil para trabalhar com situações-problema e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. O trabalho com

> noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades etc. (PCN, 1998, p. 51).

E ainda, a geometria fractal proporciona ao aluno a possibilidade de compreender, descrever e representar de forma organizada o mundo em que vive. Pois,

> os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no ensino fundamental, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. (PCN, 1998, p. 51).

A geometria fractal também proporciona a possibilidade de se trabalhar, em sala de aula, os importantes conceitos de isometria e homotetia de:

> modo que permita o desenvolvimento de habilidades de percepção espacial e como recurso para induzir de forma experimental a descoberta, por exemplo, das condições para que duas figuras sejam congruentes ou semelhantes. (PCN, 1998, p. 51).

Como a geometria fractal é um ramo da teoria do caos, suas aplicações se estendem a outras ciências - Biologia, Física, Química, Geografia, Artes, e etc. - proporcionando uma forma de se trabalhar a interdisciplinaridade. Além do que, a geometria fractal utiliza-se da percepção e estímulo visual, pois as

> habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas podem ser desenvolvidas com um trabalho adequado de Geometria, para que o aluno possa usar as formas e propriedades geométricas na representação e visualização de partes do mundo que o cerca.
> Essas competências são importantes na compreensão e ampliação da percepção de espaço e construção de modelos para interpretar questões da Matemática e de outras áreas do conhecimento. De fato, perceber as relações entre as representações planas nos desenhos, mapas e na tela do computador com os objetos que lhes deram origem, conceber novas formas planas ou espaciais e suas propriedades a partir dessas representações são essenciais para a leitura do mundo através dos olhos das outras ciências, em especial a Física. (PCNEM, 2000, Parte III, p. 44).

O PCN$^+$ orienta que "*Na direção de valorização da Matemática, no seu aspecto estético, existem alguns vídeos que podem servir como ponto de partida de discussão de assuntos tais como simetrias, fractais, o número de ouro, etc.*" (PCN$^+$, 2000, p. 93).

Finalmente, para demonstrar que esse saber científico está se tornando um saber escolar, as diretrizes curriculares de matemática para as séries finais do ensino fundamental e para o ensino médio do estado do Paraná já citam o tema fractal: "*Noções de geometrias não-euclidianas: geometria projetiva (pontos de fuga e linhas do horizonte); geometria topológica (conceitos de interior, exterior, fronteira, vizinhança, conexidade, curvas e conjuntos abertos e fechados) e noção de geometria dos fractais.*" (Diretrizes, 2008, p. 26).

O mais interessante ainda, é que essas diretrizes apontam quais são as atividades que devem ser trabalhadas pelo professor, indicando a maneira pela qual se deve fazer a transposição do saber científico para o saber a ensinar, citando que:

> no Ensino Médio se aprofunda os estudos das Noções de Geometrias não-euclidianas ao abordar a Geometria dos Fractais, Geometria Hiperbólica e Elíptica. Na geometria dos Fractais pode-se explorar: o floco de neve e a curva de Koch; triângulo e tapete de Sierpinski. (Diretrizes, 2008, p. 26).

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Vimos que os fractais – saber científico – vem sofrendo transformações adaptativas para tornar-se um saber escolar. No momento parece-nos que os fractais estão na noosfera, recebendo influências por parte de professores, cientistas, especialistas, autores de livros e outros agentes de educação como discorremos anteriormente. Além dos documentos oficiais citados nesse artigo, queremos também deixar registrado que o tema geometria fractal está presente em alguns livros didáticos como: Matemática – Ensino fundamental de 9 anos – 8° ano, Editora Moderna; Matemática – Oficinas de conceitos – 8° ano, Editora Ática; e Matemática – Fazendo a diferença – 9° ano, Editora FTD. O site oficial do MEC traz também como apoio didático vídeos versando sobre esse tema.

Em suma, acreditamos que, devido a sua importância nas mais variadas áreas da ciência e pelos motivos já apresentados neste artigo, a geometria fractal irá se estabelecer como um saber escolar. Cabe-nos, como educadores, promover uma elaboração didática visando à prática educativa. No sentido de transpor esse saber científico para um saber escolar, D'Ambrosio (1996, p. 59, grifos do autor) já havia sinalizado essa transposição, quando considerou os fractais como um objeto de ensino que deve ser explorado:

> Pode-se prever que na matemática do futuro serão importantes o que hoje se chama matemática discreta e igualmente o que se chamavam *casos patológicos*, desde a não-linearidade até a teoria do caos, fractais, *fuzzies*, teoria dos jogos, pesquisa operacional, programação dinâmica.
> Lamentavelmente isso só é estudado em algumas especialidades de matemática aplicada. Justamente por representar a matemática do futuro, é muito mais interessante para o jovem. Os problemas tratados são mais interessantes, a visualização é no estilo moderno, parecido com o que se vê em TV e nos computadores. O mais importante é destacar que toda essa matemática é acessível até no nível primário (*apud* Baier, Tânia, 2005, p. 19).

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

Barbosa, R.M. **Descobrindo a Geometria Fractal**: para a sala de aula. 2 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005. 156 p.

Baier, T. **O nexo “geometria fractal – produção da ciência contemporânea” tomado como núcleo do currículo de matemática do ensino básico**. 2005. 147 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto/Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais.** Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998. 152 p. Disponível em: http://portaldoprofessor.mec.gov.br/linksCursosMateriais.html?categoria=23>. Acesso em: 12 fev. 2010.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto/Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio – Parte III.** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2000. 58 p.
Disponível em: < http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf >. Acesso em: 12 fev. 2010.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. **PCN$^+$.** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2000. 141 p.
Disponível em: < http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf >. Acesso em: 12 fev. 2010.

Capra, F. **A Teia da Vida:** Uma nova compreensão científica dos sistemas vivos. São Paulo: Editora Pensamento-Cultrix, 2006. 256 p.

Janos, M. **Geometria Fractal**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008. 100 p.

Machado, S. D. A. (org.) *et al*. **Educação Matemática:** uma (nova) introdução. São Paulo: EDUC, 2008. 253 p.

Moroz, M.; Gianfaldoni, M.H.T.A. **O Processo de Pesquisa:** iniciação. Brasília: Liber livro, 2007. 2. ed. ampl., v. 2, 124 p.

Stewart, I. **Será que Deus Joga Dados?** A nova matemática do caos. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 1991. 336 p.