



## PANORAMA DE UM ESTUDO SOBRE A FATORAÇÃO

*Miriam do rocio Guadagnini*  
*Universidade Anhanguera de São Paulo*  
*miriamguadagnini@hotmail.com*

*Marlene Alves dias*  
*Universidade Anhanguera de São Paulo*  
*maralvesdias@gmail.com*

*Valdir Bezerra dos Santos Júnior*  
*Universidade Federal de Pernambuco*  
*valdir.bezerra@gmail.com*

**Resumo:** Apresentamos parte de uma pesquisa acerca do ensino e aprendizagem da álgebra, especificamente, de fatoração numérica e algébrica. Tomamos como fundamentação teórica a Teoria Antropológica do Didático de Chevallard, e como metodologia, o Percurso de Estudo e Pesquisa – PEP de Chevallard e colaboradores. Realizamos estudo da ecologia e das praxeologias do ensino de fatoração numérica e algébrica, presentes nas orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais e da ecologia em livros didáticos. Os resultados das análises mostram que as fatorações numérica e algébrica são introduzidas e esgotadas nos 6º e 8º anos respectivamente, o que parece representar conhecimentos dissociados tanto para as propostas do PCN como para os professores.

**Palavras-chave:** Fatoração; Teoria Antropológica do Didático; Percurso de Estudo e Pesquisa.

## INTRODUÇÃO

Neste texto apresentamos um recorte de uma pesquisa em andamento, que trata do Ensino e Aprendizagem da Fatoração numérica e da Fatoração algébrica.

Observamos inicialmente que a fatoração é introduzida no 6º ano do Ensino Fundamental – anos finais, como uma forma de escrita alternativa para os números naturais e evolui para a introdução das ideias algébricas (8º Ano) e aplicações na resolução de problemas que envolvem equações de 1º e 2º graus, sistemas de equações, expressões algébricas, expressões algébricas fracionárias, aplicações envolvendo área e perímetro, a noção de funções, as equações polinomiais, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas,

nos Ensinos Fundamental – anos finais e Ensino Médio. No Ensino Superior, para os cursos da área de exatas, informática e negócios, a fatoração está inserida na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, em particular, quando da introdução das noções de limites, derivadas e integrais.

De modo geral, observamos que no Ensino Médio e no Ensino Superior a fatoração é utilizada como conhecimento retrospectivo disponível para facilitar a solução de determinadas tarefas, isto é, trata-se de uma ferramenta introduzida no Ensino Fundamental para a qual se espera que o estudante possa utilizá-la quando necessário sem que para isso seja preciso uma demanda explícita. Por exemplo, o cálculo da área máxima de uma região dado seu perímetro.

Esta função da fatoração enquanto objeto da prática, ou seja, objeto protomatemático, é explicitada por Mercier (2002) que indica que esses objetos estão associados às competências e capacidades dos estudantes em reconhecê-los nas situações em que os mesmos são chamados a funcionar, ou seja, só podemos analisá-los em situações em que os mesmos representam comportamentos esperados para a solução da situação, por exemplo, utilizar a fatoração para resolver uma situação que envolve a noção de limite de uma função, reconhecer uma expressão de segundo grau dentro de uma fatoração simples, verificar que um cálculo não está terminado. Os objetos protomatemáticos são construídos na prática e só podem viver como práticas. A dimensão prática de um objeto matemático permite dizer que o saber ensinado é organizado como texto e como um falar do texto do saber, não está escrito nos livros didáticos, mas o professor constrói, mostra e pratica como que em uma leitura. No entanto, Mercier (2002) destaca que um programa de ensino que ajusta a prática do texto do saber em objetos paramatemáticos e protomatemáticos torna possível a aprendizagem dos estudantes de acordo com seu tempo próprio de aprendizagem. Brousseau (1999) destaca que os objetos protomatemáticos e sua aplicação pertencem ao meio da ação dos estudantes.

Isso nos conduziu a centrar nosso estudo sobre a fatoração, visto que ela representa uma ferramenta matemática indispensável à evolução da aprendizagem matemática e, por se tratar de um objeto protomatemático introduzido no Brasil a partir do sexto ano do Ensino Fundamental, por meio da noção de fatoração numérica: Máximo Divisor Comum (mdc) e Mínimo Múltiplo Comum (mmc), que é aplicada no estudo da operação de adição de frações e em situações de contexto da vida, mas que não é revisitada nos outros anos, nem mesmo quando da introdução da fatoração algébrica, sendo apenas

utilizada como conhecimento retrospectivo disponível. A fatoração algébrica é introduzida no oitavo ano, articulada com a noção de área enquanto ferramenta de visualização.

Assim, pretendemos com a nossa pesquisa compreender as praxeologias didáticas e matemáticas utilizadas no estudo da fatoração no Brasil, para observar quais situações são privilegiadas neste estudo e destacar aquelas que precisam ser enfatizadas, assim como propor novas formas de trabalho.

## REFERENCIAL TEÓRICO E METODOLÓGICO

Para as análises das expectativas institucionais utilizamos às noções de relações institucional e pessoal e, praxeologia que servem de base para as análises dos saberes a ensinar, ou seja, aqueles que se supõe tenham sido desenvolvidos nas etapas escolares consideradas e que, conseqüentemente, podem corresponder aos conhecimentos prévios dos estudantes, isto é, os conhecimentos necessários para fundamentar a engenharia PEP, podendo ser revisitados por meio de Atividades de Estudo e de Pesquisa AEP.

Assim, apresentamos a seguir as noções da Teoria Antropológica do Didático que utilizamos para a análise dos documentos oficiais e dos livros didáticos.

### A) Noções da Teoria Antropológica do Didático (TAD)

Chevallard (1992) após introduzir os elementos primitivos da TAD, a saber: o objeto (O), a pessoas (X) e a instituição I, define as noções de relação institucional e pessoal ao objeto O.

Assim, um objeto O existe para uma pessoa X se esta tem uma relação pessoal  $R(X,O)$ , ou seja, uma relação que corresponde ao conjunto de interações que X pode ter com O, no sentido de poder manipular, utilizar, falar de, sonhar com, etc. Isto define a maneira que a pessoa X conhece O.

Para Chevallard (1992) o par formado pelo indivíduo X e o sistema de relações pessoais  $R(X, O)$  define uma pessoa. Este sistema de relações pessoais evolui, uma vez que objetos que não existiam passam a existir, outros deixam de existir e assim a relação pessoal de X muda. Nesta evolução o invariante é o indivíduo e o que muda é a pessoa, ou seja, esta modificação da relação pessoal do indivíduo X com o objeto O representa a aprendizagem.

A relação institucional ao objeto O é definida por Chevallard (1992) como uma restrição para a relação de uma pessoa com o mesmo objeto O quando esta se torna sujeito

de uma instituição  $I$ . A relação institucional depende da posição  $p$  que a pessoa  $X$  ocupa em  $I$ , indicada por  $RI(p,O)$ . Desta forma, a pessoa  $X$  é o emergente de um complexo de sujeições institucionais.

As noções de relações institucional e pessoal são ferramentas que nos permitem identificar o que o indivíduo ou a instituição são capazes de fazer com o objeto  $O$ .

Para descrever a relação institucional associada a um saber, observando que este tem um prestígio cultural para certos objetos, Chevallard (1998) introduz a noção de praxeologia que corresponde a um modelo para descrever o conhecimento matemático, situando a atividade matemática no conjunto das atividades humanas e das instituições sociais. Assim, a noção de praxeologia segundo Chevallard (1998) é ampla, pois toda atividade humana pode ser analisada por meio da noção de praxeologia, como por exemplos: calcular o valor de uma equação, um gráfico, arrumar uma mesa.

A noção de praxeologia está associada aos tipos de tarefas ( $T$ ), sendo que o termo tarefa não difere da definição popularizada, ou seja, o ato de realizar alguma atividade. Na maioria dos casos, uma tarefa é expressa por um verbo; em nosso trabalho: fatore, calcule, desenvolva, expresse, determine, resolva.

Assim, para Chevallard, uma praxeologia, corresponde aos tipos de tarefas ( $T$ ) que para serem executadas, necessitam de uma maneira de fazer, denominada técnica ( $\tau$ ). A associação entre tipo de tarefa-técnica é definida como um saber fazer, a qual necessita de uma tecnologia ( $\theta$ ), um discurso racional que justifica e torna a técnica compreensível, e de uma teoria ( $\Theta$ ) que justifica e esclarece a tecnologia utilizada, resultando em uma associação tecnológico-teórico, que corresponde ao saber. Em outras palavras, reconhecer que tipo de técnica, por exemplo, redução de termos semelhantes está associada à realização da tarefa, simplificar os termos de um polinômio; saber justificá-la, por meio de uma tecnologia apropriada, a propriedade da soma de polinômios; para isto é preciso dispor de uma teoria adequada para justificar, criar e compreender tal tecnologia, neste caso, os anéis de polinômios.

Após esta breve descrição dos elementos da TAD que correspondem às ferramentas da análise proposta, apresentamos uma concisa descrição da nova metodologia de engenharia didática denominada Percurso de Estudo e de Pesquisa (PEP).

## **B) Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP)**

Chevallard (2009) chama Didática de Investigação Codisciplinar, um domínio de pesquisa relativamente novo em didática, dando origem à ideia da nova metodologia de Engenharia Didática denominada Percurso de Estudo e de Pesquisa (PEP).

Para Barquero *et al* (2011), um PEP se inicia com o estudo de uma questão Q com forte poder gerador, capaz de levantar outras questões derivadas. Para respondê-las é necessária a construção de ferramentas matemáticas (técnicas, noções, propriedades, etc.). Esse modelo metodológico recupera a relação: questões e respostas, origem da construção do conhecimento científico e especialmente da atividade matemática.

Segundo os autores um PEP tem como foco principal, introduzir no ambiente escolar uma epistemologia que possa dar sentido ao estudo da matemática, permitindo aos estudantes o estudo e a compreensão do tema por meio do questionamento e da investigação.

Barquero *et al.* (2011) destacam ainda que o objetivo principal de um PEP é dar resposta a questão proposta e não aprender ou ensinar conceitos, enfatizando que o processo de modelagem pode ser considerado com um objetivo do ensino em si mesmo, não como um meio para construir novos conhecimentos. O desenvolvimento de um PEP supõe que devemos dar o mesmo valor tanto para o processo de estudo – a atividade de modelagem – como para a resposta que o mesmo gera.

Desse modo, o PEP propõe alterar os programas escolares por meio de um conjunto de perguntas geratrizes, cuja resposta permita ao estudante encontrar ou reencontrar as organizações matemáticas propostas para o ensino, procurando assim devolver o sentido e a funcionalidade da matemática escolar (Chevallard, 2009a), o que o torna uma ferramenta didática capaz de confrontar o fenômeno de monumentalização do saber matemático e da perda de sentido, passível de serem observados em diversas instituições.

Em nossa pesquisa consideramos as noções de Percurso de Estudo e de Pesquisa (PEP) e de Atividades de Estudo e Pesquisa. (AEP). Estas noções nos amparam metodologicamente de forma a buscar as respostas à nossa questão geratriz Q<sub>0</sub>: “Qual o sentido do uso da fatoração para os estudantes?”

## DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA

Para compreender a relação institucional presente no ensino de matemática, quando se introduz as noções de fatoração numérica e algébrica, elaboramos uma grade de análise, para análise de livros didáticos, conforme modelo de Dias (1998), que foi aplicada em três livros didáticos de diferentes épocas, com a função de auxiliar na identificação das praxeologias existentes nas obras e evidenciar as tarefas típicas. Além disso, estudar a ecologia da noção de fatoração durante sete décadas, nos auxiliou a compreender melhor as possibilidades de novas propostas de ensino para esta noção.

Em função da possibilidade de existência de diferentes saberes ensinados, uma vez que estes dependem da instituição e da necessidade dos estudantes de participarem de macroavaliações para a sua progressão nos estudos, analisamos a proposta nacional contida nos Parâmetros Curriculares Nacionais, Brasil (1998), que indica as noções matemáticas a serem desenvolvidas nos quatro anos do Ensino Fundamental – anos finais e algumas metodologias possíveis para a introdução e desenvolvimento das mesmas, o que denominamos relação institucional esperada.

Para completar a análise da relação institucional, ou seja, do saber a ensinar, consideramos como relação institucional existente, analisadas via livros didáticos avaliados e distribuídos pelo Ministério da Educação Nacional para melhor compreender como os objetos protomatemáticos fatoração numérica e fatoração algébrica vem sendo desenvolvidos no decorrer do tempo, analisamos um livro didático da década de 1960, outro da década de 1976 e um dos livros didáticos atualmente distribuído pelo Ministério da Educação. Definimos por meio das análises o habitat e o nicho considerado para a vivência dessas noções a fim de compreendermos a ecologia da noção de fatoração e situarmos a organização matemática (OM) de referência relativa à fatoração, de acordo com estes documentos.

Com a finalidade de compreender a relação pessoal estabelecida por professores em relação ao objeto matemático fatoração, investigamos por meio de questionários professores de matemática do ensino fundamental, médio e superior.

Com base nas análises das relações esperadas, existentes e pessoal estabelecemos nosso modelo epistemológico de referência e delineamos a Organização Matemática de referência relativa à fatoração (numérica e algébrica) que nos ancorou na construção do

percurso de estudo e pesquisa que foi aplicado durante a experimentação em sala de aula com estudantes do 1º Ano do Ensino Médio e de Licenciandos em Matemática.

Partimos de um questionamento inicial amplo de estudo que refinamos por meio das seguintes questões: “Por que estudar fatoração desde o ensino fundamental?”, “Que praxeologias precisam ser enfatizadas nesse estudo?” e “Que metodologia podemos propor para motivar esse estudo?”

Em função dos questionamentos descritos acima, consideramos como objetivo geral da pesquisa: “Identificar por meio de um estudo das relações institucionais esperadas e existentes o papel da fatoração nas propostas institucionais e propor uma nova forma de estudo para esta noção”.

## PERSPECTIVAS

Para finalizar, as análises das pesquisas existentes sobre fatoração numérica e fatoração algébrica mostra que este tema é ainda pouco trabalhado e que a nossa proposta de incentivar os professores a encontrarem as possíveis aplicações por meio de um estudo centrado em uma engenharia de tipo PEP é original tanto em relação a trabalhos envolvendo este tipo de engenharia, como em relação ao nosso objeto de estudo, isto é, a fatoração.

A análise das relações institucionais esperadas via PCN (BRASIL, 1998) realizada por meio da análise ecológica e praxeológica, coloca em evidência que quando o estudante é chamado a utilizar a fatoração numérica e algébrica é preciso que o professor esteja atento para revisitar a noção de fatoração, pois as noções de mdc, mmc, e suas aplicações para a resolução de problemas que envolvem o mdc e mmc são consideradas somente no sexto ano e produtos notáveis, fatoração e a resolução de expressões algébricas e simplificações de frações algébricas, são enfatizadas apenas para o oitavo ano. No entanto, o documento não indica uma relação explícita entre a fatoração numérica e algébrica, que são tratadas como noções independentes.

## REFERÊNCIAS

BARQUERO, B. *et al.* Los recorridos de estudio e investigación y la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las ciencias experimentales. *Enseñanza de las Ciencias*, v.29(3), p. 339-352, 2011.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais*. Brasília: MEC/SEF, Matemática: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental, 1998.

BROUSSEAU, G. *Educación y Didáctica de las Matemáticas*. Educación Matemática. México, 1999.

CASTRUCCI, B. *et al. Matemática*. (5a série e 7a serie), editora FTD, 1976.

CHEVALLARD, Y. *Conditions et Contraintes de la Recherche en Didactique des Mathématiques: um témoignage*. 2011. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr>. Acesso em 5 de fevereiro de 2016

\_\_\_\_\_. *La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse a partir de la TAD*, 2009. Disponível em <http://yves.chevallard.free.fr/>. Acesso em: 23 de março de 2016.

\_\_\_\_\_. *La notion de PER: problèmes et avancées*. 2009a. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/>. Acesso em 25 de fevereiro de 2016.

\_\_\_\_\_. *Passé et présent de la Théorie Anthropologique du Didactique*, 2007. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr>. Acesso em: 21 de agosto de 2015

\_\_\_\_\_. *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: l'approche anthropologique*. 1998. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr>. Acesso em: 13 de março de 2016

\_\_\_\_\_. Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 12(1), p. 73-112, 1992.

DANTE, L. R. *Projeto Teláris: Matemática*. (6º e 8º ano), editora Ática, 2012.

DIAS, M. A. *Problèmes d'articulation entre points de vue "cartésien" et "paramétrique" dans l'enseignement de l'algèbre linéaire*. 510f. Thèse de Doctorat, Université Paris 7, Paris, 1998.

MERCIER, A. La transposition des objets d'enseignement et la définition de l'espace didactique, en mathématiques. *Revue Française de Pédagogie*, n° 141, octobre-novembre-décembre 2002, p.135-171.

SANGIORGI, O. *Matemática Curso Moderno*. Editora Companhia Nacional: São Paulo, 1966.