MOBILIZAÇÃO E ARTICULAÇÃO DE CONCEITOS DE GEOMETRIA PLANA E DE ÁLGEBRA EM ESTUDOS DA GEOMETRIA ANALÍTICA

Adnilson Ferreira de Paula

Profa. Dra. Marilena Bittar

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS

RESUMO

Este artigo está vinculado ao trabalho de pesquisa que teve como objetivo principal investigar a mobilização e a articulação de conceitos de Geometria Plana e de Álgebra em estudos da Geometria Analítica, por alunos de um curso de Licenciatura em Matemática. Nessa pesquisa foi elaborada uma sequência de atividades, fundamentada nos princípios da Engenharia Didática e embasada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Com a intenção de provocar e favorecer conversões entre registros foi utilizado, na aplicação da sequência, o *software grafeq*, além do papel e lápis. Nesse texto apresentamos alguns resultados referentes a duas das atividades desenvolvidas na pesquisa. Os resultados obtidos permitem concluir que os acadêmicos apresentaram dificuldades nos dois sentidos de conversão, isto é, do registro algébrico para o geométrico e vice versa, assim como nos tratamentos de cada registro. Também foi possível perceber que as retroações oferecidas pelo *software* foram fundamentais para que os acadêmicos manifestassem algum tipo de evolução em suas estratégias.

Palavras-chave: Geometria Analítica. Representação Semiótica. Sistemas de Inequações. *Software grafeq*.

1 INTRODUÇÃO

A Geometria Analítica, conceito estudado tanto no Ensino Médio quanto no Ensino Superior, tem como função tratar algebricamente as propriedades dos elementos geométricos. Trata-se da parte da matemática que estabelece as relações existentes entre enunciados geométricos e proposições relativas a equações, inequações e funções algébricas.

De acordo as Orientações Curriculares para o Ensino Médio, para que essa articulação seja significativa para o aluno, o professor deve trabalhar o entendimento de figuras geométricas, via equações, e o entendimento de equações, via figuras geométricas. Nesse sentido deve-se ter o cuidado de observar tanto a prática do professor quanto o desempenho do aluno.

Goulart (2009) afirma que no Ensino Médio há, por parte dos alunos, dificuldade de entender que implicitamente a uma equação dada, está sendo feita uma referência a um conjunto de pontos cujas coordenadas atendem certas condições algébricas.

Ao encontro dessa dificuldade Richit (2005) faz uma análise de como trabalhar projetos em Geometria Analítica objetivando favorecer a formação de futuros professores de Matemática e considera

> [...] urgente e necessário uma reformulação dos currículos das licenciaturas, de modo que sejam promovidas experiências educacionais com os futuros professores de Matemática, que os coloquem no comando de seu processo de formação e, que seja promovida uma formação integral que contemple as dimensões específica, pedagógica e tecnológica. (RICHIT, 2005, p. 162).

De acordo com as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Curso de Matemática, o principal objetivo do Curso de Licenciatura em Matemática é formar professores para o Ensino Básico. Diante das constatações de Goulart (2009) e Richit (2005) relacionadas ao ensino e aprendizagem da Geometria Analítica, parece clara a dificuldade que poderá ocorrer na relação professor/aluno/Geometria Analítica. Dessa forma, buscamos contribuições para o processo de ensino e aprendizagem da Geometria Analítica, a partir da análise de atividades desenvolvidas por futuros professores.

2 QUESTÃO DE PESQUISA E OBJETIVOS

Objetivo geral: **analisar como alunos de um Curso de Licenciatura em Matemática mobilizam e articulam conceitos da Geometria Plana e da Álgebra em estudos da Geometria Analítica.**

Objetivos específicos:

- Identificar e analisar dificuldades de mobilização e articulação de conceitos da Geometria Plana e da Álgebra na resolução de atividades da Geometria Analítica.
- Identificar e analisar procedimentos de mobilização e articulação de conceitos de Geometria Plana e de Álgebra em estudos da Geometria Analítica.
- Investigar contribuições do s*oftware grafeq* na mobilização e articulação de conceitos de Geometria Plana e de Álgebra em estudos da Geometria Analítica.

Para desenvolvimento desse trabalho, buscando atingir os objetivos propostos, tomamos por base os registros de representação semiótica, teoria desenvolvida por Duval

(2003) e a Engenharia Didática, metodologia desenvolvida por Douady e sistematizada por Artigue (1996).

3 REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

A teoria de Registros de Representação Semiótica, desenvolvida por Raymond Duval (1988), tem como objetivo entender as dificuldades dos alunos na compreensão da matemática e a natureza dessas dificuldades. Para Duval isso não é possível restringindo-se ao campo matemático ou à sua história. Esse autor propõe uma abordagem cognitiva de análise, isto é, busca investigar como o sujeito pensa.

Duval mostra que há diferenças entre a mobilização de conceitos de matemática e de outros conceitos, e é baseado nessa argumentação que nasce a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. De acordo com o autor a diferença entre a atividade cognitiva requerida pela matemática e a necessária para outros campos do conhecimento não deve ser procurada nos conceitos da matemática e de outros domínios de conhecimentos, mas na grande variedade e na diferença da importância das representações semióticas para a matemática e para outras áreas de conhecimento.

Para Damm (2008) não existe conhecimento matemático que possa ser mobilizado por uma pessoa, sem auxílio de uma representação. Por exemplo, ninguém vê um ponto, ou uma reta; o que vemos são suas representações.

> A matemática trabalha com objetos abstratos. Ou seja, os objetos matemáticos não são diretamente acessíveis à percepção, necessitando, para sua apreensão, o uso de uma representação. Nesse caso, as representações através de símbolos, signos, códigos, tabelas, gráficos, algoritmos, desenhos é bastante significativa, pois permite a comunicação entre os sujeitos e as atividades do pensamento, permitindo registros de representação diferentes de um mesmo objeto matemático (DAMM, 2008, p. 170).

Para atingir os objetivos dessa pesquisa trabalhamos principalmente com os conceitos de funções, equações e inequações. Para cada um desses conceitos destacamos a utilização das representações algébrica e gráfica, que são diferentes registros de representação e que estão presentes na maioria das atividades propostas para esse estudo.

Duval (2003) caracteriza a atividade matemática basicamente por meio de quatro tipos de Registros de Representações Semióticas separados em dois grupos:

- ✓ Registros Multifuncionais: constituídos pela **Língua Natural** e pelas **Figuras Geométricas (registro figural)** no qual não é possível operar matematicamente com esses registros, por exemplo, não adicionamos um quadrado a outro quadrado, ou um quadrado a um triângulo. Podemos, sim, fazer transformações nas figuras acrescentando traçados, mas não por meio de operações como entendemos na matemática.

- ✓ Registros Monofuncionais: constituídos pelo **Sistema de Escritas (registro das coordenadas e registro algébrico)** e pelos **Gráficos Cartesianos (registro gráfico),** ao contrário dos multifuncionais, admitem tratamento.

Entendemos por registro das coordenadas **(RC)** o registro das coordenadas cartesianas (x, y), representantes de um ponto no plano, por exemplo, (2, 3); o registro algébrico **(RA)** é visto como o das relações algébricas, por exemplo, $(x+5)^2/4 + (y-5)^2/25 < 1$; o registro gráfico **(RG)** como o que representa regiões do plano que fazem uso dos eixos cartesianos e o registro figural **(RF)** refere-se àquelas regiões do plano que não apresentam os eixos em sua formação (quando temos uma figura geométrica plana, por exemplo).

Para Duval os registros de representação semiótica admitem dois tipos de transformações que são extremamente diferentes: os tratamentos e as conversões.

> Os tratamentos são transformações dentro de um mesmo registro: por exemplo, efetuar um cálculo ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou de representações dos números; resolver uma equação ou um sistema de equações [...] as conversões são transformações de representações que consistem em mudar de registro conservando os mesmos objetos denotados: por exemplo, passar da escrita algébrica de uma equação à sua representação gráfica. (DUVAL, 2003, p.16)

Ao pedirmos, por exemplo, a construção da bandeira do Brasil a ser realizada no *grafeq*, deve-se primeiramente observar todas as propriedades da figura geométrica (registro figural), transformar cada traço em linguagem algébrica aceitável pelo *software* (registro algébrico) e em seguida observar a construção no plano cartesiano oferecida pelo *software* (registro geométrico). Nesse exemplo são duas as conversões: do registro figural (quadro geométrico) para o registro algébrico (quadro algébrico) e do registro algébrico para o registro gráfico (quadro geométrico analítico). Dessa forma além de ocorrer conversões entre os registros figural, algébrico e o gráfico, trabalha-se com os quadros geométrico, algébrico e o geométrico analítico. Cabe salientar, entretanto, que, nossas análises estarão centradas nas conversões realizadas e nos conceitos mobilizados para que isso ocorra.

4 ALGUNS RESULTADOS

A partir das análises preliminares e dos objetivos propostos para esse estudo elaboramos nossa sequência didática composta por 16 atividades (quadro 1) tomando por base os princípios metodológicos da Engenharia Didática (ARTIGUE, 1996).

	Sessão 01 24/05/11	Sessão 02 26/05/11	Sessão 03 31/05/11	Sessão 04 02/06/11	Sessão 05 07/06/11	Sessão 06 09/06/11
Bloco 01 / Atividades	01, 02 e 03	04 e 05	06			
Bloco 02 / Atividades			07, 08, 09 e 10	11		
Bloco 03 / Atividades				12 e 13		
Bloco 04 / Atividades					14 e 15	
Bloco 05 / Atividade						16

Quadro 1: Distribuição das atividades – Bloco/sessão/tempo

As primeiras atividades (blocos 01 e 02) davam maior ênfase à especificidade de um ou dois conceitos objetivando investigar conceitos básicos, porém fundamentais no estudo da Geometria Analítica. Nessa perspectiva os alunos deveriam mobilizar propriedades relacionadas à função afim, função quadrática, equação da circunferência, equação da elipse e equação da hipérbole, bem como de suas respectivas representações gráficas, na resolução dos problemas. Já nas últimas atividades (blocos 03, 04 e 05) buscávamos proporcionar aos acadêmicos um ambiente (papel e lápis ou *software*) oportuno para mobilização e articulação de uma gama de conceitos de Geometria Plana e de Álgebra em estudos da Geometria Analítica. Contudo, nesse texto fazemos algumas análises referentes a apenas duas dessas atividades: a 13, do bloco 03, e 14, do bloco 04. Essas atividades assim como as outras foram desenvolvidas pelos quatro sujeitos de nossa pesquisa. São eles: Carlos, Nayara, Fabiana e Edna.

Os resultados apresentados a seguir estão baseados na concepção, na realização, na observação e na análise de uma sequência de ensino, elementos da engenharia didática.

<u>Atividade 13 – Bloco 3</u>

Construa no *grafeq* a bandeira do Brasil. Justifique cada uma das construções.

Apesar de não fornecermos o registro figural inicial, como os alunos conhecem a bandeira brasileira podemos considerar que o registro de partida dessa atividade é o figural.

Carlos enxergou a bandeira do Brasil como a justaposição de várias regiões do plano separadas pelos eixos cartesianos (figura 1). Para a construção da mesma, encontrou dificuldade para tratar algebricamente a inclinação da reta, entretanto, após conseguir plotar as quatro regiões que compõem a parte verde da bandeira, seguiu, sem muitas dificuldades, alterando as cores de cada parte do registro gráfico e aproveitando as retroações oferecidas pelo *software.*

Vale ressaltar o cuidado que o acadêmico teve em limitar o losango internamente por uma circunferência. Assim, observando o desenvolvimento de atividades anteriores, essa estratégia evidenciou melhor compreensão do aluno ao trabalhar conceitos de sistemas de inequações, assim como de circunferência, pois, cada uma das quatro regiões que compõem a parte amarela da bandeira construída por Carlos exige restrições distintas. Destacamos também o fato de o aluno alterar as cores de cada uma das relações, pois dessa forma é provável que tenha relacionado os registros gráficos com os respectivos registros e algébricos. Assim, a partir das relações algébricas corretas deduz novas relações.

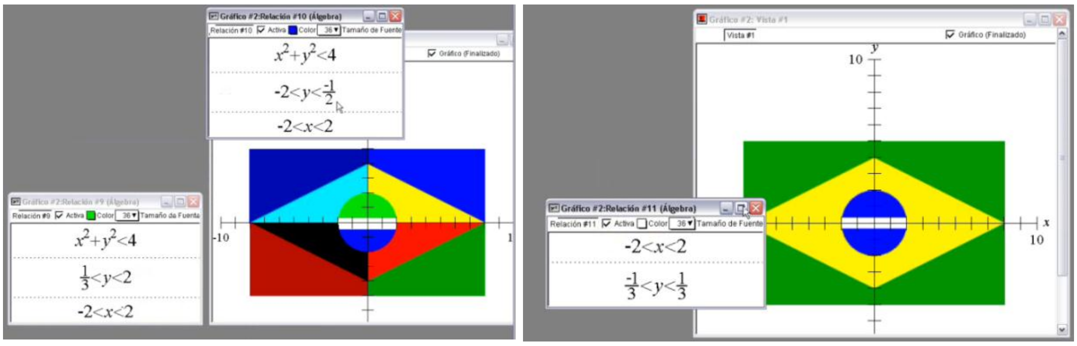

Figura 1: Vídeo – Construção da bandeira do Brasil – Carlos

Para a construção das regiões azul e branca Carlos mobilizou conceitos de função constante (faixa branca reta) e não de função quadrática como previmos. A parte azul é vista como duas regiões (cemi-círculo), uma acima e outra abaixo da faixa branca.

Fabiana, assim como Carlos decidiu desenvolver a bandeira de forma que o centro do desenho coincidisse com a origem dos eixos cartesianos, entretanto fez uso de uma estratégia não descrita na análise *a priori*, isto é, decidiu fazer o registro gráfico com a parte mais comprida sobre o eixo y, diferentemente do usual e das estratégias dos outros alunos.

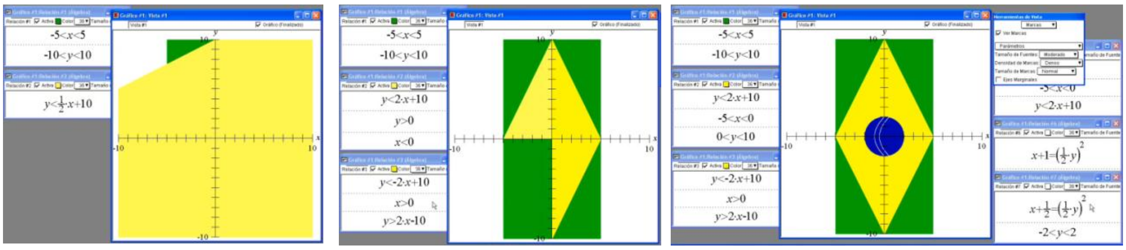

Figura 2: Vídeo – Construção da bandeira do Brasil – Fabiana

Inicialmente Fabiana teve dificuldades para trabalhar conceitos algébricos de função afim, mais especificamente em relação a inclinação da reta. No entanto, a partir das retroações oferecidas pelo *software*, a aluna relacionou o coeficiente de x de uma função afim com a orientação (vertical ou horizontal) da bandeira como podemos ver a seguir

> *Adnilson: no caso você tá querendo alterar a inclinação da reta... Aí você tem que lembrar o que você faz para alterar a inclinação da reta... O que altera a inclinação da reta?*
> *Fabiana e Nayara: o coeficiente do x*
> *Edna: ah então por isso que é x sobre 2 então*
> *Nayara: por isso que eu falei... Eu tentei com 2x só que aí a reta ela ficou assim óh, tortinha.*
> *Fabiana: ah! Então é por isso que o de vocês tá dando 1/2. O meu tá dando 2x que eu to fazendo ao contrário... Ai que legal a Nayara tá trabalhando com fração e eu to trabalhando de ponta cabeça*

A partir dessa discussão, percebemos que os alunos tiveram dificuldades relativas aos conceitos algébricos e geométricos de função afim, no entanto, mobilizam e articulam tais conceitos quando colocados diante do *grafeq* e de uma situação problema. Na utilização do *software*, Fabiana alterou a posição da circunferência e a abertura da parábola até conseguir o registro gráfico considerado satisfatório para ela.

Nayara, assim como Carlos e Fabiana, escolheu coincidir o centro de desenho com a origem dos eixos cartesianos e, da mesma forma que Fabiana, desenvolveu a atividade sobrepondo as regiões da figura. A acadêmica mobilizou conceitos de função modular para representar a região interna ao losango, porém apresentou dificuldade para tratar algebricamente conceitos de inequação, não diferenciando, de imediato, a relação algébrica que representaria a região interna ou externa ao losango. Da mesma forma que Carlos e Fabiana, Nayara apresentou dificuldades para tratar algebricamente a inclinação de uma reta. A aluna ainda representa graficamente região branca da bandeira utilizando função afim e, dessa forma não mobiliza nem articula conceitos algébricos e geométricos de função quadrática.

Edna, também apresentou dificuldade para tratar algebricamente conceitos de função afim e mais especificamente o que diz respeito a inclinação da reta. A acadêmica conseguiu alterar a inclinação da reta, no entanto, não conseguiu associá-la à região retangular ao ponto de conseguir a simetria necessária existente entre o retângulo e o losango. Dessa forma, a aluna só conseguiu concluir a atividade na sessão posterior a essa, após realizá-la previamente em casa.

No geral os alunos mobilizaram conceitos algébricos e geométricos de função afim, de função constante, de função modular, de inequação do primeiro grau, de circunferência e de parábola de forma satisfatória. Contudo, essa mobilização e articulação entre conceitos algébricos e geométricos não ocorreu de imediato e ainda concordamos que o *grafeq* contribuiu consideravelmente para esse resultado, pois a partir dele os alunos puderam analisar e reformular seus registros algébricos até chegar ao resultado desejado.

É oportuno dizer que os diferentes procedimentos adotados pelos alunos enriqueceram essa atividade no que diz respeito ao tratamento dos conceitos trabalhados. Enquanto Carlos faz uso da justaposição de regiões, Fabiana e Nayara sobrepuseram as regiões sendo algumas delas justapostas. Com esses diferentes procedimentos tivemos a oportunidade de ver os alunos mobilizarem os mesmos conceitos tratando-os de forma diferente.

É importante lembrar que queríamos valorizar a heterogeneidade dos dois sentidos de conversão, pois de acordo com Duval (2003) ao realizar a conversão em um sentido não significa sucesso no processo inverso, isto é, quando se invertem os registros de partida e chegada. Dessa forma desenvolvemos atividades que tinha como objetivo provocar a conversão do registro algébrico para o registro gráfico. A seguir trazemos um exemplo de atividades que tinham esse objetivo.

<u>Atividade 14 – Bloco 4</u>

Esboce, no papel e no mesmo plano cartesiano, as regiões delimitadas pelas relações apresentadas a seguir. Justifique suas construções.

$(x-4)^2 + y^2 < 4$; $(x+4)^2 + y^2 < 4$; $\begin{cases} x^2 - y^2 < 1 \\ -2 < y < 2 \end{cases}$; $\begin{cases} -6 < x < 6 \\ 2 < y < 4 \end{cases}$

Os alunos não encontraram dificuldade para realizar a conversão do registro algébrico para o registro gráfico da região interna às circunferências e ao retângulo. Para a construção da região interna ao retângulo destacamos, como exemplo, as justificativas de Edna e de

Nayara. Edna diz que “*estes intervalos dados já são conhecidos e por isso logo desenhei um retângulo*”. De forma similar Nayara comenta: “*A figura é um retângulo já conhecido, só fiz os intervalos e pintei a parte interna*”.

A mesma facilidade de conversão não ocorreu para construção da região interna a hipérbole. Quando questionado se teve alguma dificuldade na construção dessa atividade Carlos diz que “*sim. Na construção da hipérbole, pois não sabia a forma que ela assumiria*”. Da mesma forma Nayara diz ter encontrado dificuldade para “*encontrar a figura da relação 3, mas já suspeitava de qual figura seria (hipérbole)*”.

É oportuno dizer que todos os alunos conseguiram, a partir de pesquisa na internet ou de discussão em grupo, chegar ao resultado esperado para essa relação algébrica. Esse fato mostrou uma melhor compreensão dos conceitos trabalhados. Essa hipótese pode ser confirmada pelos próprios alunos. Nayara, por exemplo, diz: “*aprendi mais um pouco sobre o conceito da hipérbole. No caso a função do a e do b*”. Já Carlos diz que aprendeu “*o processo de construção da hipérbole e suas assíntotas*” enquanto Edna diz: “*relembrei conceitos já aprendido*s”. Assim, acreditamos que todos conseguiram atingir o objetivo da atividade, pois, de uma forma ou de outra, apresentaram um registro gráfico solicitado.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

De modo geral os alunos não apresentaram muitas dificuldades para mobilizar conceitos de ponto e reta quando trabalhado com papel e lápis, no entanto, fazendo uso do *software*, não conseguiram com a mesma facilidade realizar a conversão do registro figural para o registro algébrico diante de uma atividade que relacionava função afim e inequação, isto é, regiões do plano limitadas por retas. A mesma dificuldade ocorreu no trabalho com conceitos de circunferência, elipse, hipérbole sendo que a conversão do registro gráfico para o algébrico não ocorria de forma imediata. Destacamos, porém, aquelas dificuldades encontradas no tratamento das funções afim e quadrática na qual os acadêmicos não articulavam as propriedades que alteram a inclinação da reta (função afim) e a abertura do gráfico que representa essa função (função quadrática).

Percebemos que, à medida que desenvolviam as atividades no *software*, os alunos plotavam expressões algébricas desnecessárias para representar uma determinada curva ou região. Consideramos esse fato uma suposta dificuldade de compreensão dos conceitos trabalhados, isto é, na conversão entre registros. Da mesma forma observamos que ao fazer uso do *software*, os alunos estavam plotando e reformulando ou apagando os registros algébricos referentes aos registros gráficos com rapidez digna de observação: seria essa estratégia (tentativa e erro) uma forma de "escapar" das dificuldades de compreensão dos conceitos trabalhados?

Já em outras atividades, notamos que os alunos ao representar algebricamente uma determinada região do plano, definiam o conjunto de pontos apenas em função de y. Concluímos, nesse caso, que essa dificuldade tem origem na compreensão que os alunos têm do significado algébrico de um ponto de coordenadas (x, y) pertencer ou não a uma região do plano.

Diante das dificuldades, entendemos que cada registro algébrico referente a um registro gráfico ou figural executado pelo *software* e estando de forma incorreta, proporcionou aos alunos tal oportunidade de construção de conhecimento, pois diante das retroações oferecidas pelo *software* cada aluno pode refletir, reformular ou trocar o registro algébrico fazendo isso quantas vezes fosse necessário para melhor compreenderem a articulação entre a Álgebra e a Geometria Plana. Com outras palavras, dizemos que os acadêmicos, por meio do *software*, puderam explorar regras e propriedades de conceitos matemáticos até conseguirem realizar a conversão do registro gráfico ou figural para o registro algébrico tendo no *software* a confirmação de tal conversão.

É oportuno também dizer que diante dos problemas propostos, das dificuldades encontradas, do *software* ou do papel e lápis os acadêmicos apresentaram uma série de procedimentos que enriqueceram a forma de mobilizarem e articularem os conceitos algébricos e geométricos em estudos da Geometria Analítica.

Nas atividades desenvolvidas com papel e lápis os alunos utilizaram tanto métodos algébricos quanto geométricos sendo que deram maior preferência para procedimentos algébricos. Da mesma forma ocorreu nas atividades desenvolvidas com o *software* nas quais os acadêmicos desenvolveram as atividades por justaposição de figuras ou por sobreposição, e nesse caso notamos que grande parte das atividades foram solucionadas por justaposição. Em outros problemas os acadêmicos tiveram a oportunidade de desenvolver, a partir do *software*, um registro gráfico em uma posição qualquer do plano cartesiano. Nessas atividades notamos que os alunos preferem coincidir o centro do desenho com o ponto P (0,0) do plano cartesiano, pois dessa forma as translações de curvas ou regiões são reduzidas de forma considerável tornando mais fácil a resolução da atividade.

Contudo, nossos resultados mostraram que um trabalho, que explore o *software grafeq* e a Geometria Analítica em estreita relação com a Álgebra e a Geometria, levando os alunos a praticarem transformações do tipo tratamento e conversões deve levar a uma melhor apreensão dos objetos da Geometria Analítica. Entretanto, apesar do trabalho desenvolvido algumas dificuldades persistiram até o final.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARTIGUE, Michelle. Engenharia Didática. In: BRUN, Jean (org.). **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 193–217.

BITTAR, Marilena. **Diferentes aspectos do uso das novas tecnologias na aprendizagem da matemática.** In: Anais do VII ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática, 2001, Rio de Janeiro. São Paulo: SBEM - Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2001.

BITTAR, Marilena. A escolha do software educacional e a proposta didática do professor. In: BELINE, Willian; COSTA, Nicole Meneguelo Lobo. (Orgs**.). Educação Matemática, tecnologia e formação de professores**: Algumas reflexões**.** 1 ed. Campo Mourão: FECILCAM, 2010. p. 215-242.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias.** Brasília: Mec, 2006.

DAMM, Regina Flemming. Registros de Representação. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. (Org.). **Educação Matemática**: uma (nova) introdução. 3 ed. São Paulo: EDUC, 2008. p. 167-188.

DE PAULA, Adnilson Ferreira. **Mobilização e articulação de conceitos de geometria plana e de álgebra em estudos da geometria analítica.** 2011. 175 f. Dissertação (Mestrado em educação Matemática) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2011.

DIRETRIZES Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura. Brasília: 2001. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES13022.pdf>. Acesso em: 08 fev. 2011.

DUVAL, Raymond. Registros de Representação Semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. (Org.). **Aprendizagem em Matemática**: Registro de Representação Semiótica. 1 ed. São Paulo: PAPIRUS, 2003. p. 11- 33.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e pensamento humano**: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais. 1 ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

GOULART, Juliana Bender. **O estudo da equação $Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$: Utilizando o software Grefeq - uma proposta para o Ensino Médio.** 2009. 159 f. Dissertação (mestrado profissionalizante no Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2009.

RICHIT, Adriana. **Projetos em geometria analítica usando software de geometria dinâmica: repensando a formação inicial docente em matemática.** 2005. 169 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, São Paulo, 2005.