

ERROS EM ÁLGEBRA ELEMENTAR: UM ESTUDO COM ALUNOS DO 1º ANO DO ENSINO MÉDIO

Franciele Rodrigues de Moraes¹

UFMS

Marilena Bittar²

UFMS

Resumo: Apresenta-se nesse artigo elementos de uma pesquisa em desenvolvimento, cujo objetivo geral é Investigar erros na aprendizagem da álgebra e sua superação por alunos do 1º ano do ensino médio com o auxílio do *software Aplusix* e de um ambiente virtual de aprendizagem. Para este estudo usamos a Teoria dos Campos Conceituais para compreender os erros e dificuldades de apreensão de um conceito. A partir de estudos sobre dificuldades de aprendizagem, erros e concepções algébricas, estão sendo elaboradas atividades procurando identificar, por meio dos esquemas mobilizados pelos alunos, alguns teoremas em ação falsos utilizados pelos alunos na resolução dessas atividades. Além disso, serão propostas atividades visando à desestabilização desses teoremas, buscando a superação dos erros e dificuldade manifestada pelos alunos. Os exercícios são resolvidos usando o *Aplusix*, o que permite, aos alunos, validação constante das suas atividades facilitando, juntamente com o ambiente virtual de aprendizagem, nosso acompanhamento individual dos erros dos alunos.

Palavras-chave: Erros. Álgebra. Esquemas. Aplusix. Ambiente Virtual de Aprendizagem.

Considerações Iniciais

Várias pesquisas (BOOTH, 1995; TELES, 2004; NOGUEIRA, 2008) apontam dificuldades de aprendizagem em álgebra, mas poucas investigações indicam possíveis caminhos a serem percorridos, que ajudem na superação dessas dificuldades, métodos que levem em consideração o ritmo de construção do conhecimento de cada aluno. Estamos nos referindo às dificuldades cognitivas relativas à apreensão do objeto matemático que impedem, por exemplo, que um aluno do 1º ano do Ensino Médio resolva uma determinada tarefa, em álgebra, que, nessa série, seria esperado que ele resolvesse.

Nasce assim nosso questionamento: Que tipo de ação pode favorecer a superação de dificuldades de aprendizagem em álgebra elementar por alunos do 1º ano do ensino médio? A partir dessa questão inicial buscamos investigações que abordassem, de alguma forma, nossa inquietação fornecendo, assim, pistas para prosseguirmos o estudo. Encontramos a pesquisa de Bittar (2010) mostrando que a utilização do *software Aplusix* pode contribuir com a autonomia dos alunos ajudando-os na sua aprendizagem. Além disso, uma vez que nosso

¹ Aluna do Programa de Mestrado em Educação Matemática e Bolsista CAPES. E-mail: rodrigues_franciele@hotmail.com.

² Professora do Programa de Mestrado em Educação Matemática e orientadora desta pesquisa. E-mail: marilenabittar@gmail.com.

público alvo é o aluno em dificuldades de aprendizagem, acreditamos ser fundamental que ele tenha um acompanhamento individual e constante sobre seu trabalho. Não é possível realizar tal acompanhamento presencialmente, de onde a possibilidade de propor um ambiente virtual de aprendizagem onde possa haver interações síncronas e assíncronas entre os alunos e nós, de modo a podermos acompanhar cada aluno.

Assim, a partir desta questão inicial e de alguns recursos disponíveis para serem utilizados na prática docente, como meio de contribuir com a aprendizagem dos alunos, optamos por usar a tecnologia para nos ajudar tanto na identificação e análise dos erros dos alunos quanto na elaboração de situações que levem à superação de dificuldades de aprendizagem dos alunos provocadas por esses erros.

Diante disso definimos nossa questão de pesquisa: De que maneira a tecnologia pode favorecer a identificação e a “superação” de erros na aprendizagem da álgebra elementar por alunos do 1º ano do ensino médio?

Concordamos com Cury (2008), quando a mesma destaca que o erro é um conhecimento, é um saber que o aluno possui, não falta dele. Além disso, não é um conhecimento falso, uma vez que permitiu produzir respostas satisfatórias ou corretas a determinados tipos de problemas. No entanto, esse conhecimento, ao ser transposto ou aplicado a outras categorias de problemas, produz respostas inadequadas ou incorretas. Então superar o erro é construir um conhecimento com um domínio de validade total.

A fim de responder nossa questão definimos como objetivo principal: **Investigar erros na aprendizagem da álgebra e sua “superação” por alunos do 1º ano do ensino médio com o auxílio do *software Aplusix* e de um ambiente virtual de aprendizagem.**

Para atingir o objetivo geral, definimos os seguintes objetivos específicos:

- Identificar e analisar erros em álgebra elementar de alunos do 1º ano do Ensino Médio.
- Investigar contribuições do *software Aplusix* para a superação de erros visando a aprendizagem da álgebra.
- Investigar as contribuições do uso de um ambiente virtual de aprendizagem para a superação dos erros dos alunos.

A identificação e análise dos erros é fundamental para dar suporte à elaboração de questões a serem propostas no *Aplusix* e que ajudem os alunos a superar esses erros. Além disso, para avaliarmos o trabalho realizado com os alunos será necessário conhecer suas dificuldades e estudar como elas evoluem ao longo do trabalho. E como queremos estudar as dificuldades de aprendizagem, por meio dos erros dos alunos com o auxílio de dois ambientes

informatizados, precisamos investigar as contribuições de cada um deles para esse processo, considerando suas especificidades. Para analisar a contribuição do uso articulado dos dois ambientes, precisamos compreender como um ambiente virtual que permite a troca entre o grupo de alunos e nós, pesquisadores, pode contribuir com a superação dos erros dos alunos em álgebra. Analisaremos as interações realizadas nesse ambiente, que tipo de dúvidas postas pelos alunos, a frequência de acesso ao ambiente e outras questões desse tipo.

Para tanto queremos identificar e analisar alguns erros na aprendizagem da álgebra elementar vivenciadas por alunos do 1º ano do Ensino Médio e realizar um estudo sobre como o uso da tecnologia pode contribuir para a identificação e superação de erros.

Referencial Teórico

Cury (1994; 1995; 2006; 2008) realizou diversos estudos que apontam diversas possibilidades de se trabalhar com a análise de erros. De acordo com Cury (2008), podemos aprender muito com os erros dos alunos; ao analisar as produções dos alunos, temos a possibilidade de entender como esses alunos se apropriam dos conceitos matemáticos e, ao identificar os erros em suas produções, podemos usá-los para favorecer a construção do conhecimento pelo aluno. E acrescentamos a possibilidades da superação das dificuldades de aprendizagem, pois é a partir da compreensão dos erros dos alunos que conseguiremos analisar as dificuldades de aprendizagem dos alunos e usá-los como um possível caminho para a superação.

Para entender algumas das dificuldades de aprendizagem, optamos por usar a Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1990) por ser uma teoria cognitivista que ajuda a compreender as dificuldades de apreensão de um conceito. Utilizaremos, principalmente, o conceito de esquemas tanto para nos ajudar a compreender e modelar os erros dos alunos quanto para indicar caminhos (situações) na superação desses erros. Alguns estudos das dificuldades de aprendizagem dos alunos, usando a Teoria dos Campos Conceituais, têm sido realizados. Bittar (2009), Bittar et al (2004) e Burigato (2007) mostram como a modelagem e o estudo dos esquemas mobilizados pelos alunos permite identificar e compreender algumas dificuldades de aprendizagem.

Segundo Vergnaud, não é por meio de uma ou poucas situações que o conceito vai se tornar significativo para o aluno, por isso a importância de analisar os aspectos conceituais contidos nos esquemas utilizados pelos alunos ao lidarem com as situações e de se estudar o conjunto de situações que melhor permitem a construção desses esquemas. Os esquemas:

[...] organizam o comportamento do sujeito para uma classe de situações dada, mas também organizam, ao mesmo tempo, sua ação e a atividade de representação simbólica, sobretudo lingüística, que acompanha essa ação. (VERGNAUD apud BURIGATO, 2007, p. 19)

Vamos identificar os esquemas presentes nas produções dos alunos e, por meio dessa identificação, buscar elementos que ajudem a identificar e compreender os erros dos alunos.

Para as situações que podem contribuir para a superação dos erros, utilizaremos a teoria construtivista da aprendizagem (PIAGET, 1978), que tem como base a problematização matemática e a hipótese de que o aluno aprende adaptando-se a “um meio que é produtor de contradições, de dificuldades, de desequilíbrios, um pouco como o faz a sociedade humana. Esse saber, fruto da adaptação do aluno, se manifesta por meio de respostas novas que são a prova da aprendizagem” (BROUSSEAU *apud* BITTAR; CHAACHOUA, 2004, p. 02). A construção do conhecimento acontece na dialética do aluno com o meio e consideramos que a tecnologia pode contribuir com a constituição de um meio favorável à superação desses erros.

Procedimentos Metodológicos

Em nossa pesquisa analisamos os erros por meio da análise de conteúdo, que, segundo Bardin é:

Um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter por procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) destas mensagens. (2011, p. 48).

No desenvolvimento de nossa experimentação, procuramos trabalhar com alunos do 1º ano do ensino médio de uma escola pública que acreditam ter alguma dificuldade de aprendizagem e para isso optamos por fazer a identificação inicial desses alunos por meio de um questionário no qual o aluno, respondendo algumas questões, pode identificar se tem ou não dificuldades de aprendizagem e então se candidata, voluntariamente, a participar de nossa pesquisa.

Para conseguir alcançar nosso objetivo vamos identificar os esquemas utilizados pelos alunos, presentes nas produções dos mesmos e, a partir dessa identificação, buscar elementos que ajudem a identificar alguns erros para a compreensão de algumas das dificuldades dos alunos. Para tanto primeiramente listamos alguns teoremas em ação possíveis de serem utilizados pelos alunos. Para elaborar esta lista foi feito o estudo de algumas

pesquisas que tratam de concepções, erros e dificuldades no ensino e aprendizagem do conceito de álgebra, e assim pode-se observar como os conceitos de álgebra estão sendo tratados no ensino atual, e ainda identificar alguns erros e dificuldades de aprendizagem desse conceito.

A partir desse estudo são elaborados alguns exercícios nos quais os alunos podem ou não mobilizar os teoremas em ação falsos previamente listados ou outros. Caso tais teoremas sejam identificados nos esquemas construídos pelos alunos, são propostas atividades visando desestabilizá-los buscando a superação dos erros manifestada com essa mobilização. Na resolução dos exercícios, os alunos utilizaram o *Aplusix*, o que lhes possibilitaram a validação constante de suas atividades, ajudando-os a avançar em seus esquemas, e de não continuarem cometendo os mesmos erros.

O *Aplusix* possibilita a realização de um trabalho individual com os erros de cada aluno, o que dificilmente acontece sem o uso desse tipo de ferramenta. Esse software permite que cada aluno siga seu ritmo de aprendizagem; suas retroações permitem que o aluno reveja sua produção e analise seus erros, corrigindo-os, tornando-se, assim, mais autônomo em sua aprendizagem e consciente dos seus erros. Possibilita, ao aluno, validação constante de suas atividades, ajudando-o a não continuar cometendo os mesmos erros, e a não persistir no uso dos teoremas em ação falsos.

Além do *software*, que está sendo utilizado nos encontros presenciais, foi criado um ambiente virtual de aprendizagem que permite as interações síncronas e assíncronas. Optamos por usar o Google Docs, por ser um aplicativo gratuito e oferecer diversas possibilidades de uso, sendo que o único requisito para se usar esse recurso é a criação de uma conta no Google. Esse aplicativo permite a criação e armazenamento de diversos tipos de documentos³, oferecendo uma opção, de forma fácil e rápida, de compartilhamento de documentos, sendo que essa opção de compartilhamento possibilita a realização de um trabalho colaborativo com os alunos.

Acreditamos que se faz necessário oferecer esse apoio constante a esses alunos em dificuldades de aprendizagem, para que possam discutir as dúvidas surgidas e assim progredirem na aprendizagem. O ambiente virtual pode oferecer esse apoio, inclusive pelo fato de o aluno poder acessá-lo quando quiser, independente da hora ou dia sem precisar esperar o próximo encontro. As interações, tanto no ambiente virtual quanto dos alunos com o

³ Mais informações sobre as potencialidades do Google Docs acesse: <<https://docs.google.com/support/>>

Aplusix, são salvas, possibilitando análise detalhada das resoluções, dúvidas e erros de cada um, ajudando-nos a alcançar nosso objetivo.

Alguns Resultados

Até o momento da redação desse artigo, concluímos a fase inicial de identificação dos nossos sujeitos e começamos com a coleta de dados.

Nossa pesquisa está sendo desenvolvida em uma Escola Estadual do município de Campo Grande MS. Após um primeiro contato com a escola decidimos realizar nossos encontros presenciais no sexto tempo de aula⁴, do período matutino. Esses encontros estão acontecendo em semanas alternadas no laboratório de informática da escola.

Em nosso primeiro encontro com os alunos, explicamos a eles do se tratava nossa pesquisa e aplicamos um questionário, afim de, coletar alguns dados e convidando-os a participarem, como voluntários, da nossa pesquisa. Aplicamos o questionário para duas turmas de primeiro ano, perfazendo um total de cinquenta e seis alunos. Desse total, vinte e dois se voluntariaram a participar da nossa pesquisa.

Feito o convite e escolhas dos sujeitos tivemos mais cinco encontros presenciais durante o segundo semestre de 2011, encontros que irão continuar acontecendo ao longo do primeiro semestre de 2012.

No primeiro encontro, apresentamos aos alunos o ambiente virtual de aprendizagem Google Docs, um aplicativo gratuito que oferece diversas ferramentas, por exemplo, a opção de inserir equações matemáticas, o que pode facilitar a interação dos alunos conosco. Para acessar esse ambiente cada aluno abriu uma conta no Google, podendo assim utilizar o serviço de e-mail Gmail, e o Google Docs. No ambiente virtual criamos uma página, que pode ser acessada e editada por todos os alunos. Em seguida foi criada uma página pessoal para cada aluno; todos os alunos podem acessar as páginas pessoais, mas somente o titular da página pode editá-la.

Neste encontro os alunos tiveram algumas dificuldades em abrir a conta, porém, após essa etapa acessaram facilmente o ambiente Docs. Imediatamente começaram a mexer nas ferramentas do ambiente, envolvendo-se com a atividade proposta que era de se apresentar na página do grupo. Durante a semana que não tínhamos encontro presencial, foi colocado na página pessoal de cada um, questões sobre o nosso projeto com objetivo de iniciar uma discussão sobre possíveis dificuldades de aprendizagem dos alunos, e verificar o acesso do

⁴ Nossos encontros presenciais tem duração de cinquenta minutos e acontecem após o término das aulas dos alunos.

ambiente pelos alunos. Essas discussões seriam aprofundadas no nosso próximo encontro presencial servindo para começarmos com nossas atividades no *software Aplusix*.

O segundo encontro presencial teve início com a apresentação do *software Aplusix* e um pouco de suas potencialidades. Todos se envolveram na atividade que era de resolver algumas equações simples do primeiro grau. Os alunos não tiveram nenhuma dificuldade em usar o *Aplusix*, por ser um *software* com uma interface “amigável” e simples, possibilitando uma rápida familiarização e sem maiores dificuldades.

O *software Aplusix* contém um *Mapa de Exercícios*, dividido em duas categorias, cálculo numérico e cálculo algébrico, com famílias de exercícios gerados automaticamente. Cada vez que o usuário pede uma lista de exercícios de uma determinada família, uma lista de, aproximadamente, 12 exercícios é gerada. O aluno pode ter retroações do software durante sua resolução (modo de aprendizagem) ou fazer a lista de exercícios sem nenhum tipo de retroação do software (modo teste) No modo **teste**, ao final da lista de atividades o usuário tem sua pontuação e a possibilidade de rever seu teste, corrigindo o que errou.

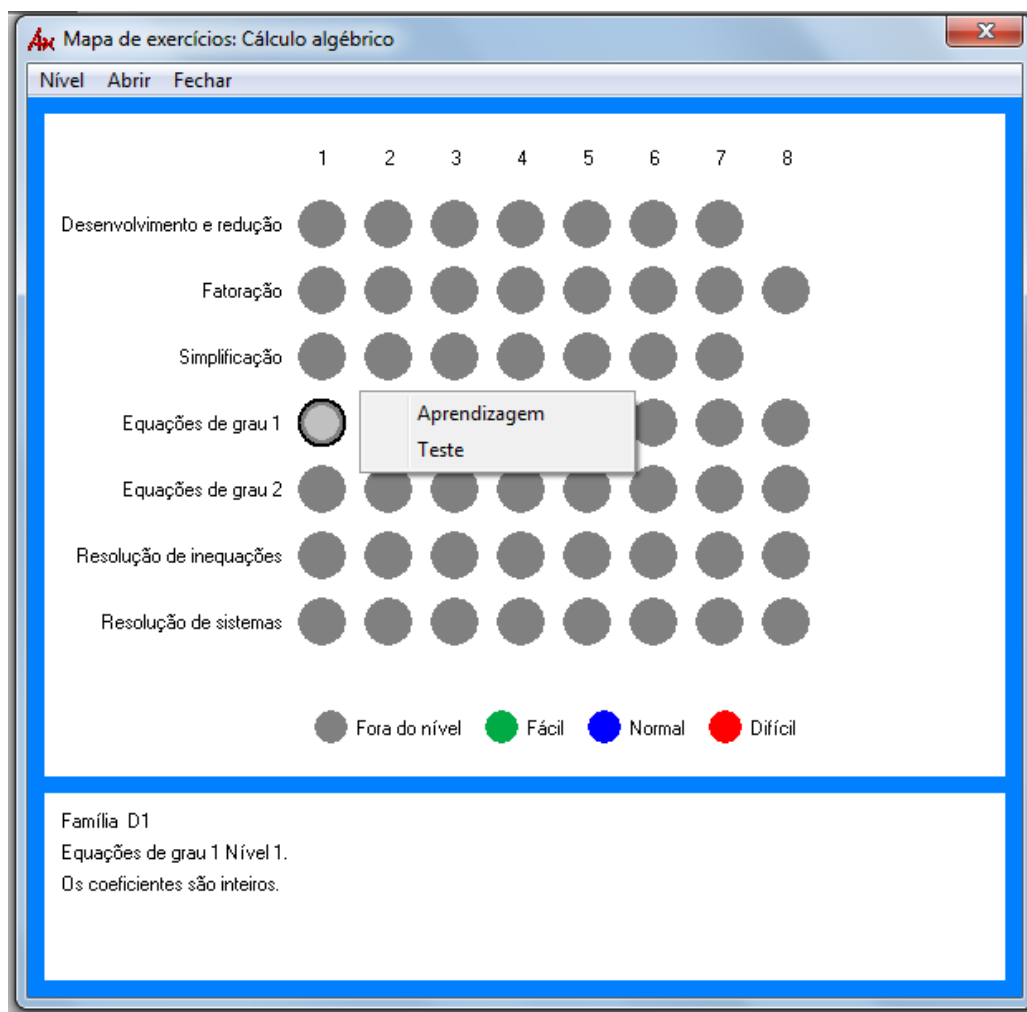


Figura 1: Mapa de Teste

Foi explicado aos alunos como funciona o mapa de exercícios do *Aplusix* e após a explicação pedimos a eles que escolhessem a primeira família de exercícios de equações do primeiro grau, em modo de “Aprendizagem”.

Diante disso achamos interessante fazer uma breve análise dessa família de exercícios. Essa família apresenta uma lista de dez exercícios de equações do primeiro grau bem simples, como mostra o quadro 1.

$4x = 0$
$-6x = 30$
$-2x - 8 = -2$
$-x = -16$
$5 = -3x$

Quadro 1: Exercícios típicos da primeira família de equações do primeiro grau.

Todos conseguiram resolver a família de equações solicitadas, alguns com mais dificuldades que outros, mas todos conseguiram chegar até o final da lista gerada. Infelizmente não temos o histórico desta atividade e, portanto não temos como analisar o passo a passo da realização das atividades dos alunos, mas pode-se perceber, durante a resolução das atividades que os alunos apresentaram algumas dificuldades do tipo:

$$ax + b = c \Rightarrow ax = c + b \text{ ou } ax - b = c \Rightarrow ax = c + b.$$

Dando-nos alguns indícios de alguns possíveis teoremas em ação errôneos, mobilizados pelos alunos. Diante disso decidimos postar algumas atividades no ambiente virtual de aprendizagem sobre esse assunto.

Como não houve uma entrada significativa dos alunos no ambiente, discutimos as atividades no encontro presencial. E de acordo com os relatos das dificuldades dos alunos em resolver as atividades postadas no ambiente ficou combinado que nos iríamos elaborar um tutorial do Docs para auxiliá-los nas atividades à distância.

As atividades tratavam do problema de equilíbrio em uma balança, dadas em linguagem natural, onde se desejava saber o peso de uma caixa de chocolate. E posteriormente foi pedindo que transformassem para linguagem algébrica e ao final resolvesse a equação encontrada, podendo optar por usar o *Aplusix* para auxilia na resolução.

Durante a resolução ficou muito evidente a dificuldade deles em resolver as equações. Alguns conseguiam resolver rapidamente a equação usando a analogia da balança, mas quando era solicitada a equação de maneira formal usando a linguagem algébrica mostraram muita dificuldade.

Devido essas dificuldades que aparecem nos primeiros encontros decidimos continuar trabalhando em resolução de equações. Passamos uma lista de equações no quadro pedindo a eles que resolvessem as equações usando o *Aplusix* e que comentassem cada passo realizado durante a resolução das atividades, para termos mais elementos que nos ajudassem na identificação dos esquemas dos alunos.

Na resolução das equações pode-se perceber, com a ajuda da ferramenta vídeo cassete⁵ do *Aplusix*, algumas dificuldade dos alunos em resolver equações. A partir dessa constatação resolvemos que no próximo encontro iríamos trabalhar com mais equações semelhantes às resolvidas nesse encontro, para tentar compreender os erros dos alunos verificando a ocorrência ou não de um possível teorema em ação errôneo.

Apesar do trabalho com várias atividades de resolução de equações do primeiro grau simples, cabe ressaltar que para analisar os esquemas de um sujeito em situação é preciso uma classe significativa de atividades semelhantes, pois os esquemas são a organização invariante da atividade para uma determinada classe de situações. Enfatizando a necessidade do acompanhamento dos alunos por um período maior.

Acreditamos que o *Aplusix* está contribuindo para o processo de construção do conhecimento sobre equações, com as retroações os alunos tem a possibilidade de refletir sobre seus erros ajudando-os a avançar nos esquemas. Sem a retroação do software o aluno possivelmente pararia na primeira tentativa o que aumentaria significativamente o número de erros, com o software, diferentemente do papel e lápis os alunos verificam a não equivalência e refletem sobre as atividades, acrescentando novos elementos a seus esquemas de uso.

Ressaltamos que o *Aplusix* além de ajudar os alunos a desenvolverem esquemas para a resolução de equações, nos ajudou no estudo detalhado das atividades dos alunos. De fato, sem a ferramenta videocassete ficaria muito difícil analisar com detalhes a resolução das atividades, pois se visualizarmos somente a resposta final de cada atividade não perceberíamos os erros cometidos durante a resolução, como podemos verificar nas figuras

⁵ O *Aplusix* armazena todas as atividades realizadas pelos alunos e por meio da ferramenta *videocassete* possibilita o estudo passo a passo de todas as ações realizadas pelo aluno, inclusive as que o aluno apagou. Para saber mais sobre o *Aplusix* consultar <<http://www.aplusix.com/>>

retiradas da tela do *software* quando o aluno erra por diversas vezes e as corrige até chegar ao resultado correto.

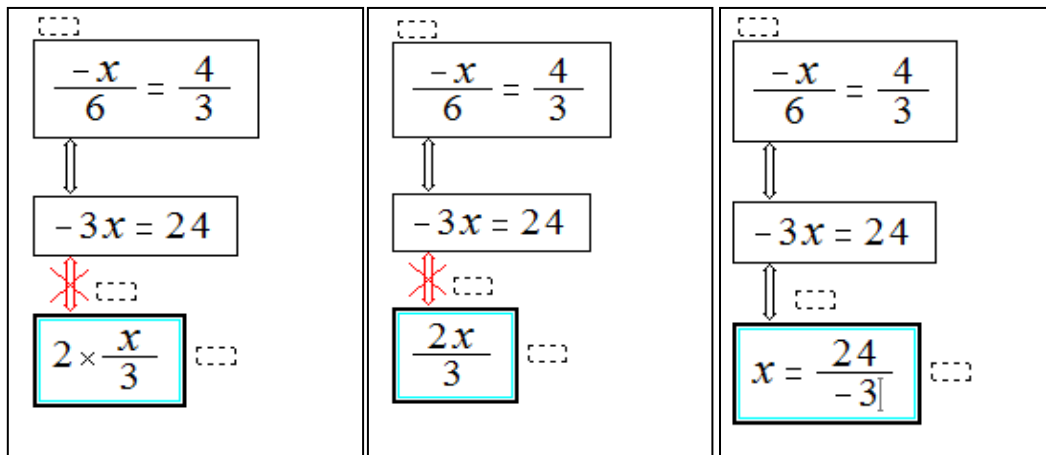


Figura 2: Passos da resolução da equação $-\frac{x}{6} = \frac{4}{3}$

Fonte: Cópia da tela *Aplusix*

Os próximos passos da nossa pesquisa será a continuação da nossa experimentação e a análise dos dados já coletados com o uso mais intensivo dos nossos referenciais teóricos.

Referências

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. Ed. rev. e ampl. São Paulo: Edições 70, 2011.

BITTAR, M. A Escolha do Software Educacional e a Proposta Didática do Professor: estudo de alguns exemplos em matemática. In: BELINE, Willian; COSTA, Nielce Meneguelo Lobo da. (Org.). **Educação Matemática, Tecnologia e Formação de Professores: algumas reflexões**. Campo Mourão - PR: Editora de FECILCAM, 2010, p. 253-285.

BITTAR, M. Contribuições da Teoria dos Campos Conceituais para o estudo das dificuldades dos alunos na passagem da Geometria Afim à Geometria Vetorial. In: BITTAR, M.; MUNIZ, C. A. (Org.). **A aprendizagem matemática na perspectiva da teoria dos campos conceituais**. 1 ed. Curitiba: Editora CRV, 2009. p. 53–76.

BITTAR, M.; CHAACHOUA, H. Integração de um Software para a Aprendizagem da Álgebra: *Aplusix*. Recife. 2004. **Anais VIII ENEM**, Recife – UFPE, 2004.

BITTAR, M.; CHAACHOUA, H.; FREITAS, J. L. M. *Aplusix*: um software para o ensino de álgebra elementar. Recife. 2004. **Anais VIII ENEM**, Recife – UFPE, 2004.

BOOTH, L. R. Dificuldades das Crianças que se Iniciam em Álgebra. In: COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Albert P. (Org.). **As Idéias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1995. p. 23-37.

BURIGATO, S. M. M. S. **Estudos de dificuldades na aprendizagem da fatoração nos ambientes: papel e lápis no *software Aplusix***. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2007.

CURY, H. N. **As concepções de Matemática dos professores e suas formas de considerar os erros dos alunos**. 1994. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1994.

CURY, H. N. Retrospectiva histórica e perspectivas atuais da análise de erros em educação matemática. *Zetetiké*, v.3, n. 4, p. 39-50, nov. 1995.

CURY, H. N. A análise de erros na construção do saber matemático In: JORNADA NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1.; JORNADA REGIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 14., 2006, Passo Fundo. **Anais**. Passo Fundo: Ed. UPF, 2006.

CURY, H. N. **Análise de Erros**: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. 1 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

NOGUEIRA, R. C. S.. **A álgebra nos livros didáticos do ensino fundamental: uma análise praxeológica**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2008.

PIAGET, J. **Fazer e compreender**. Tradução por Christina Larroudé de Paula Leite. São Paulo: Melhoramentos, 1978.

TELES, R. A. M.. A Aritmética e a álgebra na matemática escolar. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo: SBEM, ano 11, n. 16, p. 8 -15, maio 2004.