UM OLHAR SOBRE A INTRODUÇÃO DO CONCEITO DE LIMITE

Sonia Maria Monteiro da Silva Burigato
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
soniaburigato@gmail.com

Grupo de Trabalho: Ensino e Aprendizagem da Matemática

Resumo: Neste artigo apresentamos parte de uma pesquisa de doutorado em andamento que tem como objetivo investigar a introdução do conceito de limite de função com estudantes do Brasil e da França. Neste texto apresentamos alguns encaminhamentos desta pesquisa que já realizamos no Brasil. Elaboramos e aplicamos atividades com três tipos de situações relativas à apresentação do conceito de limite, com base em alguns estudos e também na teoria dos campos conceituais. As primeiras análises das produções dos estudantes diante das situações propostas estão dando indícios de que eles mobilizam esquemas que nem sempre já estão estáveis para situações que eles já viram na educação básica.

Palavras-chave: Licenciatura em Matemática; Situações; Teoremas em ação; Limite de função.

INTRODUÇÃO

Neste trabalho apresentamos parte de uma pesquisa de doutorado em andamento, que tem como objetivo principal investigar a introdução do conceito de limite de função com estudantes do Brasil e da França. O tema de nossa pesquisa tem demandado diversos estudos que tratam de investigar tanto o ensino como a aprendizagem do conceito de limite, em estudos realizados no Brasil (BARUFI, 1999; CURY, 2004), e em outros países (ARTIGUE, 1995; CORNU,1983; SIERPINSKA, 1985).

Esses estudos vêm buscando compreender a causa deste conceito trazer tantas dificuldades aos estudantes, o que tem sido evidenciado principalmente pelo baixo desempenho dos estudantes na disciplina de cálculo I, momento que geralmente, no Brasil, é apresentado esse conteúdo. Estas pesquisas na sua maioria se concentram ao redor de três dimensões: epistemológicas, cognitivas e didáticas, e vêm contribuindo com surgimento de novas propostas para o ensino do conceito de limite. Encontramos investigações de sequências didáticas com situações diferenciadas, sejam nos encaminhamentos metodológicos e/ou com uso de novos recursos utilizando esses resultados obtidos nessas três dimensões (ARTIGUE, 1995).

Nossa pesquisa pretende trazer novos elementos para discussão dessa problemática, em que buscamos compreender caminhos utilizados pelos estudantes ao lidar com as situações propostas na apresentação do conceito de limite. Nossos colaboradores são alguns estudantes de um curso de licenciatura, cuja importância da aprendizagem do conceito de limite é mais do que simplesmente uma ferramenta para utilização no seu curso. Trata-se de um conceito matemático que eles precisarão para o seu trabalho como futuros professores de matemática[35]. Até o momento já fizemos nossa experimentação com alguns estudantes do Brasil e, neste texto, pretendemos discutir um pouco do que fizemos até o momento.

ENCAMINHAMENTOS E REFERENCIAIS TEÓRICOS

Nossa problemática tem como enfoque a aprendizagem de um conceito matemático e para subsidiar nosso estudo estamos utilizando a Teoria dos Campos Conceituais (TCC) de Vergnaud (1990). A TCC é uma teoria cognitivista que nos permite compreender filiações e rupturas no processo de construção de conhecimentos matemáticos pelos estudantes. Para esse teórico a aprendizagem de um conceito não se resume à apresentação de sua definição acompanhada por alguns exemplos. É por meio de uma variedade de situações que dão sentido ao conceito, e que o estudante precisa lidar, que ele irá avançar na compreensão do mesmo. Cabe observar que cada situação demanda uma variedade de conceitos, que estão imbricados uns com outros, e, por isso, esse teórico fala de um campo conceitual.

O estudante, ao lidar com uma situação, primeiramente precisa selecionar informações, determinar as operações que precisarão ser realizadas para resolver a situação, sendo que, ele precisa também saber realizar as operações em si. Todas essas etapas são organizadas sem que o estudante precise necessariamente explicitá-las, algumas delas decisões conscientes e outras são automatizadas.

[35] Não estamos nos referindo à utilização do conceito de limite como objeto de ensino do professor da educação básica, mas sim da compreensão desse conceito para o ensino de outros conceitos da matemática, como o conjunto dos números (naturais, inteiros, racionais e irracionais), entre outros. Neste caso o professor precisa dessa compreensão para conseguir dar explicações coerentes aos estudantes, levando em consideração o nível de ensino em que ele está trabalhando, mas que também sejam corretas do ponto de vista matemático.

Neste sentido, a (TCC) propõe o conceito de esquema, como uma "organização invariante do comportamento para uma classe de situações dada" (VERGNAUD, 1990, p. 136), que comporta: invariantes operatórios, antecipações dos objetivos que precisam ser alcançados, regras de ação que permitem gerenciar as ações do sujeito, inferências e antecipações.

Assim, o estudante ao lidar com uma situação tenta buscar informações para escolher os caminhos que ele considera pertinentes, como a familiaridade com alguma outra situação resolvida satisfatoriamente. A definição de um conceito, acompanhada de alguns exemplos, proporciona muito pouco no processo de construção de um conceito, e diante disso, Vergnaud caracteriza um conceito como sendo composto por três conjuntos:

- ✓ *Situações*: que tratam do conceito, no nosso caso todas as situações para introdução do conceito de limite.
- ✓ *Invariantes operatórios*: conceitos em ação e teoremas em ação utilizados para lidar com o conjunto de situações citado.
- ✓ *Representações*: são todas as formas de linguagem utilizadas para representar as situações, bem como todos os conceitos, propriedades e procedimentos utilizados pelos estudantes para resolver as situações.

Os invariantes operatórios correspondem à parte conceitual dos esquemas que são mobilizados pelos estudantes ao lidar com as situações, constituídos por *conceitos em ação* e por *teoremas em ação*. Sendo que os conceitos em ação são tidos como pertinentes ou não à situação tratada. Enquanto que os teoremas em ação podem ser verdadeiros ou falsos, mas os estudantes utilizam acreditando serem verdadeiros, por reconhecerem certa semelhança com alguma outra situação tratada, em que ele já tem um esquema eficiente para resolver.

Assim, conseguir identificar esses teoremas em ação utilizados pelos estudantes ao lidar com as situações para o estudo do conceito de limite nos permitirá identificar tanto filiações como rupturas na construção desse conceito. Para isso, elaboramos três tipos de situações para investigar a introdução do conceito de limite.

O primeiro conjunto de atividades envolvia uma situação que denominamos como: "Escolhendo valores próximos de um elemento do domínio para verificar o que acontece com os valores da função". Essas atividades tinham como objetivo apresentar com mais detalhes questões que utilizam a aproximação de um elemento do domínio da função e a ideia de número arbitrariamente pequeno, com o estudo de funções, buscando preparar para a introdução da noção intuitiva de limite. Segundo Artigue (1995), muitos dos conceitos envolvidos no estudo do conceito de limite são considerados estabilizados e prontos para serem utilizados, por terem sido apresentados em estudos anteriores dos estudantes. Entretanto, ela argumenta que isso é um equívoco, o processo de aprendizagem de um conceito envolve uma variedade de situações que o estudante enfrenta ao longo do seu estudo fazendo com que seus esquemas vão se ampliando e se tornando cada vez mais eficientes para lidar com situações em que o conceito é necessário.

Artigue chama atenção para o fato de que muitas dessas situações, por exemplo, para aprendizagem do conjunto dos números reais só são enfrentadas pelos estudantes ao lidarem com o conceito de limite, do mesmo modo ela cita o conceito de função. Sendo que esses dois conceitos são muito utilizados na introdução do conceito de limite e os estudantes têm muita dificuldade em utiliza-los. Desse modo, escolhemos atividades que pudessem propiciar aos estudantes colocar em funcionamento esquemas já estabilizados, mas que não fossem totalmente efetivos para lidar com esse tipo de situação, sendo necessário, momento de enfrentamentos de teoremas em ação que não fossem pertinentes para a atividade trabalhada.

Ao final dessa situação, fizemos a correção das atividades no quadro com os estudantes e apresentamos a definição intuitiva de limite e retomamos cada função trabalhada nas atividades, mas discutindo como limite.

O segundo conjunto de situação, envolvia atividades para investigar limites de função em um ponto de maneira intuitiva e formal. O objetivo principal foi discutir a definição intuitiva de limite e buscar aproximá-la da definição formal, por épsilon e delta, levando em consideração o estudo realizado por Cornu (1983). Para ele existe uma "distância" entre a definição intuitiva de limite e a sua definição formal, por épsilon e delta, que não pode ser desconsiderada pelo ensino. Na definição intuitiva, na maioria das vezes, a discussão fica em torno do que acontece quando x se aproxima de um ponto p, sem ser p, com o valor da $f(x)$ que se aproxima de um dado número L. Podemos pensar que é análogo ao que é feito no estudo de funções, essa apresentação da noção intuitiva de limite fica bem próxima do que o estudante viu na educação básica, são situações pertinentes para discutir esse conceito. Percebemos que a discussão ocorre em torno das escolhas realizadas com elementos do domínio para ver o que acontece com os valores da função, ou seja, o contradomínio da função. Do mesmo modo, as atividades resolvidas, e também as que são propostas nos livros didáticos utilizados pelos professores (BARUFI, 1999; REIS, 2001) seguem o mesmo caminho, ou seja, ficam discutindo os valores próximos de x para que o limite seja encontrado.

Com a definição formal por meio de épsilon e delta, o processo passa a ser outro, conhece-se o valor do limite L e o objetivo é verificar se este limite satisfaz esta definição formal que é nova para os estudantes. O caminho é inverso, sendo que geralmente não se apresenta situações semelhantes como no caso da definição intuitiva. Cabe ao estudante compreender sozinho e fazer a relação entre estas duas definições, mas Artigue (1995) chama atenção para o fato de que os estudantes tratam essas duas definições como dois processos distintos, em que um vai tratar das variáveis da função e o outro dos valores da função e não conseguem ver relação entre elas.

Assim, elaboramos atividades para investigar limites de funções de modo intuitivo, buscando discutir o que acontecia com os valores do domínio quando os valores da imagem da função se aproximavam de determinado valor, no caso o valor do limite encontrado intuitivamente. Ao final das atividades realizadas nesta perspectiva apresentamos a definição formal e eles trabalharam com outra função para verificar o limite encontrado intuitivamente pela definição formal.

Nestas atividades buscamos também que os estudantes fizessem com mais detalhes as representações de conjuntos através de intervalos, de módulos e inequações. Primeiramente com épsilon dado, como $\varepsilon=0,5$, encontrar um delta que satisfizesse a condição para, em seguida, trabalhar com épsilon qualquer.

O terceiro conjunto de situações envolvia atividades para estudo de limites de funções infinitos e limite no infinito de modo intuitivo. Buscamos iniciar as atividades próximas ao que os estudantes vivenciaram nas situações anteriores e desse modo eles primeiramente deveriam investigar o que acontecia próximo de um número dado do domínio nas funções dadas quando x se aproxima de zero. Sendo que, nesta nova situação eles encontrariam comportamento diferente quando a função se aproximava de zero, tanto pela esquerda e quanto pela direita. Aqui a ideia é introduzir os limites laterais e o comportamento de crescimento e decrescimento das funções tendendo a mais e menos infinito. Considerando os estudos realizados que tratam sobre aprendizagem desse conceito e relacionando aos conceitos envolvidos na sua construção. Cornu (1983) fez um estudo que se tornou uma referência importante em pesquisas sobre a construção da noção de limite. Para ele os estudantes têm muita dificuldade em compreender os conceitos que envolvem o limite, pois ele considera que a ideia de infinito é uma das mais difíceis para os estudantes.

Todas as atividades que elaboramos visavam que o estudante utilizasse as quatro representações indicadas para o estudo do conceito de limite, no caso: as representações textuais, as numéricas, as algébricas e as geométricas. Buscou-se não apresentar os conceitos prontos e sim fazer com que eles fossem sendo construídos pelos estudantes durante as resoluções das atividades. Desse modo, não fornecemos respostas prontas às indagações deles, mas fomos provocando discussões sobre as dúvidas que iam surgindo durante as atividades. Somente ao final de cada tema fazíamos uma discussão geral corrigindo as atividades e inserindo os conceitos.

Antes de iniciarmos a experimentação aplicamos um questionário nos estudantes da disciplina de cálculo I buscando conhece-los e também verificar quem tinham interesse em participar do nosso estudo. Além disso, ao final da aplicação das duas primeiras situações fizemos uma entrevista com os colaboradores da pesquisa. Neste momento, estamos fazendo as análises e elaborando novas questões para fazermos uma última entrevista, buscando levantar elementos nas produções da última situação propostas, como também em dados que estamos levantando nas análises que estão em andamento.

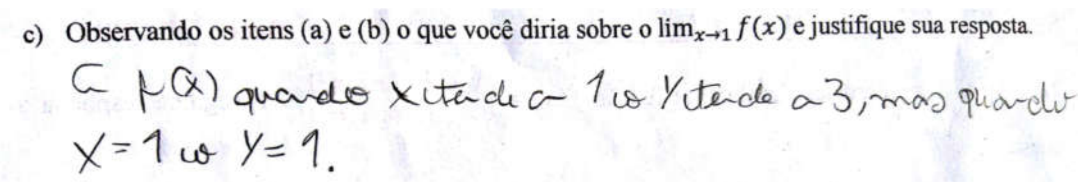
EXPERIMENTAÇÃO NO BRASIL E PRIMEIROS MOVIMENTOS DE ANÁLISES

As três situações foram aplicadas em nove encontros com duas aulas cada. Os estudantes trabalharam em duplas, mas cada um deles tinha sua folha de atividade, que iam sendo recolhidas ao final da resolução de cada uma. Todas as aplicações foram gravadas em áudios e estamos analisando as produções de quatro estudantes do curso de Licenciatura em Matemática. Eles estavam iniciando o curso da graduação e ainda não haviam tido aula sobre o conceito de limite.

Vamos apresentar neste texto a produção de uma atividade do segundo tipo de situação de um de nossos colaboradores da pesquisa, que denominaremos aqui de Aluno 1.

Na primeira atividade da segunda situação era solicitado para determinar o limite e tínhamos a função $f(x) = \begin{cases} x+2, & se\ x \neq 1 \\ 1, & se\ x = 1 \end{cases}$. O aluno 1 iniciou a atividade esboçando a função para começar a responder, como se pedia no enunciado. O primeiro item pedia para determinar o limite e ele foi escolhendo pontos próximos a 1 e escreveu que o limite era 3 e, no item seguinte, não teve dificuldade em dizer que o f(1)=1.

Contudo, quando esse estudante precisou responder o item (c), ele ficou em dúvida e questionou a pesquisadora se o limite era 3. Disse a ele que era essa exatamente a pergunta daquela atividade e que gostaria de saber o que ele pensava sobre isso. Observando a resolução dele na folha de atividade, figura 1, podemos inferir que para ele o limite quando x tende a 1 tende a 3, não sendo 3, a ideia do limite nunca ser atingido.


c) **Observando os itens (a) e (b) o que você diria sobre o $\lim_{x\to 1} f(x)$ e justifique sua resposta.**

A f(x) quando x tende a 1 o y tende a 3, mas quando x = 1 o y = 1.

Figura 1: Parte da resolução de uma das atividades da segunda situação

Nesse aspecto, o áudio foi importante para compreendermos a ideia de limite do aluno 1, pois no momento em que seu colega diz que não havia entendido o que esta questão pedia, ele ao explicar ao seu colega, nos dá indícios do esquema que está mobilizando para resolver a situação. Ele explica que <*Quando x tende a 1 tem que ver os valores próximos de 1. Quando x é um, os valores próximos aqui, você faz assim 0,9; 0,8; 1,1... aí você vê os valores que tá no y. O limite vai ser o que ele tá tendendo, vai dar 3 porque quando você coloca 0,9 o 0,8 [...]o y vai tendendo a ser 3. O limite vai ser 3*>. E seu colega questiona sobre o f(1)=1, mas o aluno 1 argumenta <*Quando f(x)...o x tende a 1, o limite.. y tende a 3, mas quando é igual a 1... é igual a 1*> Vemos que ele ao explicar ao seu colega vai adquirindo confiança e ao final dessa discussão ele afirma <*O y vai tendendo a ser 3, então o limite vai ser 3*> já não tendo mais dúvida. Podemos inferir que o aluno 1 utiliza o fato de que o limite em um ponto é o valor que a função assume próximo de um ponto e, com esse exemplo percebeu que nem sempre é o valor da função daquele ponto. Observamos que, nesta situação, o aluno 1 aprimora o esquema que havia mobilizado inicialmente, uma vez que ele começa lidando com essas atividades utilizando os esquemas que já estavam estáveis para outra situação conhecida, no caso, para as que envolviam o estudo de funções.

Nas produções deste estudante percebemos que ele utiliza a representação geométrica tanto como recurso para inferências, como também como meio de validação em suas produções, pois em diversas atividades observamos que ele inicia fazendo um rascunho da representação gráfica da função para começar a resolver. E, de fato, na entrevista ele argumenta que primeiramente tenta imaginar o gráfico da função para depois começar a responder, e que, no final, busca verificar se as respostas condizem com a representação gráfica que ele acha que é da função trabalhada. Entretanto, esse recurso se mostrou insuficiente para as atividades da última situação em que ele trabalhou com funções que não conhecia as representações gráficas.

Estamos na fase inicial das análises e conseguimos levantar diversos elementos nas produções dos estudantes que estão nos permitindo identificar esquemas mobilizados por eles, bem como rupturas que estão acontecendo em suas produções e as novas adaptações que estão sendo realizadas.

REFERÊNCIAS

ARTIGUE, M. *La enseñanza de los princípios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. In Ingeniería Didáctica em Educación Matemática:* Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Grupo Editorial Iberoamérica. Bogotá, 1995, p. 97-140.

BARUFI, M. C. B. A *Construção/negociação de Significados no Curso Universitário Inicial de Cálculo Diferencial e Integral.* Tese de Doutorado. USP-SP, 1999.

CORNU, B. *Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles.* Tese de doutorado - Universidade de Grenoble. 1983.

CURY, H. N.; CASSOL, M. *Análise de erros em Cálculo: uma pesquisa para embasar mudanças.* ACTAS CIENTIAE, Canoas, v.6, 2004, p.27-36.

REIS, F. da S. A *Tensão entre o Rigor e Intuição no Ensino de Cálculo e Análise:* A visão de Professores- Pesquisadores e autores de Livros Didáticos. Tese de doutorado (em Educação) UNICAMP, Campinas/SP, 2001.

SIERPINSKA, A. Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches em Didactique des Mathématiques,* vol. 6, n.1, p. 5-67, 1985.

VERGNAUD, G. La théorie de champs conceptuels. *Recherches em Didactique de Mathématiques,* Editora La Pensée Sauvage, Grenoble, França, 1990, v.10, n.2.3, p.133-170.