FRAÇÕES CONTÍNUAS E OS NÚMEROS IRRACIONAIS NO ENSINO BÁSICO.

Wagner Marcelo Pommer
wmpommer@usp.br/ doutorando/ FEUSP

Resumo

Os números irracionais apresentam poucas pesquisas na escolaridade básica e, quando são abordados, são geralmente apresentados com foco pendular privilegiando somente aspectos operatórios, finitos e exatos, o que limita a abordagem e o entendimento deste intrincado tema no ensino da Matemática. Este texto propõe uma reflexão envolvendo aspectos curriculares, epistemológicos e didáticos para a discussão da temática das Frações Contínuas dentro da problemática do ensino secundário. Apontamos uma possibilidade pelo uso das Frações Contínuas não como mais um componente curricular, mas como um tema que permite significar os números irracionais, assim como articular vários conhecimentos matemáticos presentes no atual currículo de Matemática, situando-os numa rede de significados, conforme Machado (1995). Em nível epistemológico, a questão de aproximação dos irracionais para os números racionais é importante e permite delimitar e significar ambos os campos numéricos, assim como evidencia vários eixos caracterizadores dos Números Reais, o que permite explorar de modo propício os pares discreto/contínuo, finito/infinito e exato/aproximado. Acrescenta-se a estes fatores a possibilidade de explorar diversas estratégias de resolução de problemas, um valioso recurso didático apontado por Echeverría e Pozo (1998). A rede de significados, conforme define Machado (1995), inerente às Frações Contínuas, pode ser contextuado a situações de ensino presentes em vários ramos da ciência, o que permite a revalorização de tópicos da Teoria dos Números, naturalmente conjugado a um tratamento algébrico, articulando e realçando as conexões internas e externas aos próprios conhecimentos matemáticos, configurando-se numa alternativa para atualizar o currículo, num viés temático.

Palavras-chave: Frações Contínuas. Números Irracionais. Ensino Básico. Rede de Significados.

Introdução

Os números irracionais, como campo de saber Matemático, foram sistematizados há pouco mais de 100 anos. Porém, no campo do ensino tal assunto ainda se encontra longe de uma compreensão quanto as possíveis abordagens.

Palis (2005) menciona que o ensino dos números irracionais ainda se encontra num mistério profundo. A ampliação do sistema dos números racionais para o sistema dos números reais é tratada no 8º e 9º anos do ensino fundamental ou na 1ª série do ensino médio. A introdução e tratamento dos números irracionais requerem "(...) um trabalho investigativo que abrange uma reflexão sobre como ensinar e como ensinar a ensinar números reais, uma das idéias fundamentais da matemática" (PALIS, 2005, p. 5).

Pesquisadores como Fischbein; Jehian; Cohen (1995), Rezende (2003), Zazkis&Sirotic (2004), Sirotic&Zazkis (2007) e Costa (2009) relatam a pouca ênfase dada ao ensino dos irracionais e também as poucas pesquisas que focam explicitamente a conceituação de números irracionais, em face das dificuldades dos alunos diante deste assunto.

Em recente pesquisa envolvendo a análise de livros didáticos, Santos (2007) e Silva (2009) indicaram que quando o assunto é abordado, a apresentação dos números irracionais recai em situações pragmáticas, envolvendo a aproximação de resultados expressos através do uso da calculadora eletrônica. Em caminho oposto, outros manuais preferem a apresentação teórica, ora expondo um número irracional como sendo uma dízima não-periódica, ora definindo como números irracionais os que não podem ser expressos por meio de uma razão entre números inteiros.

Tais abordagens simplificam a problemática de ensino de tal tema, pois esta escolha didática de apresentação dos números irracionais:

> (…) pressupõem completa compreensão dos números racionais pelos alunos. Entretanto, se isto não é alcançado ainda (como frequentemente ocorre), os alunos estarão enfrentando muitas dificuldades para abordar este novo tipo de número (VOSKOGLOU&KOSYVAS, 2011, p. 129).

A esta seqüência de abordagem geralmente segue-se a apresentação dos Números Reais como a união de dois conjuntos disjuntos: os números racionais e os números irracionais $(\Re = Q \cup Irracionai\ s)$. Rezende (2003) aponta que esta apresentação circular envolvendo os números irracionais e os números reais, usual no ensino, representa limitação para o entendimento e significação, não esclarecendo a importância do campo numérico dos irracionais, e consequentemente dos Números Reais, no ensino da Matemática.

De qualquer modo, a apresentação usual dos manuais didáticos pressupõe:

> (...) a existência de outros números além do universo trabalhado ate o momento pelos alunos (a saber, o de números racionais) - o que já é, no mínimo, incoerente, quando o que se quer e ampliar o conjunto dos números; fica pressuposta também a capacidade de um manejo com tais números que os permitam saber decidir se eles podem ou não ser escritos na forma de fração (RIPOLL, 2001, p. 1).

Este texto objetiva destacar alguns aspectos curriculares, epistemológicos e didáticos que possibilitam delimitar algumas contribuições que o tema das Frações Contínuas possibilita dentro da problemática do ensino dos números irracionais no ciclo básico.

Pressupostos Curriculares.

A Proposta Curricular, São Paulo (2008) apresenta uma lista de conteúdos para a Matemática do ciclo básico sem alterações apreciáveis para o currículo. Porém, alguns temas matemáticos, habitualmente tratados no Ensino Superior, poderiam atualizar o currículo de Matemática se inseridos na problemática deste nível de escolaridade numa abordagem acessível e compreensível, tal como fazem disciplinas como a Biologia e a Física.

O ensino de ciências e Matemática deve se embasar na aquisição e uso intuitivo de idéias fundamentais, elaborando-as e (re)elaborando-as, numa metáfora de currículo em espiral. Concordamos que as escolas estão desperdiçando:

> (...) anos preciosos, ao adiar o ensino de muitos assuntos importantes com base na crença de que são difíceis demais. (...) Os fundamentos de qualquer assunto podem, de alguma forma, ser ensinados a quem quer que seja, em qualquer idade. Embora essa proposição possa parecer de início surpreendente, sua intenção é sublinhar um ponto essencial (...): o de que as idéias básicas que se encontram no âmago de todas as ciências e da matemática, e os temas básicos que dão forma à vida e à literatura, são tão simples quanto poderosos. Ter essas idéias básicas ao seu dispor, e usá-las eficientemente, exige constante aprofundamento da compreensão que delas se tem, o que se pode conseguir aprendendo a utilizá-las em formas progressivamente mais complexas (BRUNER, 1987, p. 11-12).

Santaló (1996) aponta a necessidade de a escola estar alerta para mudanças de conteúdos e metodologias em face de novas realidades do mundo atual. Alguns temas como as Equações Diofantinas Lineares, o Cálculo Diferencial e Integral, os Fractais, a Programação Linear, dentre outros, poderiam enriquecer o próprio currículo do ensino básico, desde que acessados numa abordagem adequada. Mas como efetivar tal contribuição sem onerar o currículo?

Um pressuposto básico para a atualização curricular deve levar em consideração que o conteúdo matemático a ser tratado na escola básica é apenas um veículo para o desenvolvimento das idéias fundamentais, a ser convenientemente articuladas, de acordo com Machado (1990). Assim, a utilização de temas mais atuais não envolveria o estudo sistemático e algoritmizado, mas sim a abordagem de situações de ensino que promovam uma articulação dos conceitos já estabelecidos no próprio currículo.

Esta posição se apóia na concepção da metáfora do conhecimento como rede, conforme Machado (1995). Para o autor, conhecer é como enredar, tecer significações e partilhar significados, construídos por meio de relações entre objetos, entre as noções e os conceitos. O significado de algo é construído falando-se sobre o tema, estabelecendo múltiplas conexões pertinentes, às vezes insuspeitadas, entre temas.

Uma importante conexão para se possibilitar o conhecimento como rede é “(...) estabelecer relações entre os significados dos objetos matemáticos no interior da Matemática e externamente a ela” (MACHADO, 1995, p. 17). Atualmente, tal posicionamento se desloca quase com que exclusividade para o uso da contextualização, o que tem como conseqüência certo esquecimento que não permite a exploração das importantes conexões entre os próprios temas da Matemática.

A seguir, direcionamos olhar para as *Frações Contínuas*, posição que se justifica ao percebermos alguns nós tecidos historicamente, cujo núcleo de desenvolvimento epistemológico tem importantes implicações didáticas para o ensino dos números irracionais.

Um olhar epistemológico e didático sobre o tema das Frações Contínuas.

Assunto inicialmente desenvolvido pelos gregos, as frações contínuas foi enriquecida ao longo do desenvolvimento histórico da matemática e retomado nos séculos XVII e XVIII.

Uma fração contínua simples se assemelha a uma arquitetura de frações unitárias sucessivas, exibindo certa similaridade com o uso de frações unitárias pelos egípcios. O quadro 1 expressa a forma de uma fração contínua simples, onde a_0 representa um número inteiro e os demais termos (a_i, $i>0$) são naturais, não nulos.

Quadro 1: Expressão de uma fração contínua simples
$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ldots}}}} = [a_0; a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots]$

As Frações Contínuas representam, por um lado, um aspecto associado ao discreto, pelo fato de representar uma fração (relação de números inteiros) e, ainda, o segundo termo remonta as grandezas de natureza contínua. Uma fração contínua simples pode ter finitos ou infinitos termos, se constituindo em:

> (...) um exemplo interessante de procedimento que é finito, quando operado sobre números racionais, e infinito, quando o número dado é irracional. A origem das frações contínuas está na Grécia, onde as frações, para efeito de comparações, eram todas escritas com numerador ‘1’(CUNHA, 2007, p. 3).

As aproximações de uma fração contínua simples são denominadas convergentes. No quadro 2 representamos o 1º, 2º e 3º convergentes (c_0, c_1, c_2 respectivamente).

Quadro 2: Convergentes de uma fração contínua simples.
$c_0 = a_0$; $c_1 = a_0 + \dfrac{1}{a_1} = [a_0;a_1]$; $c_2 = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}} = [a_0;a_1,a_2]$.

O trabalho com a aproximação de números irracionais por racionais é um possível caminho para significar os números reais no ciclo básico. Boyer (1991) aponta que os povos antigos utilizavam sistematicamente aproximações numéricas. A abordagem histórica tem importância fundamental para estruturar o trabalho didático da Matemática a ser ensinada, conforme aponta Brolezzi (1996). Isso pode ser observado com relação ao surgimento dos Números Irracionais e sua relação com a aproximação para números racionais.

Com relação à civilização grega e seu apego aos números naturais, Machado (1990) aponta que eles não consideravam como números as frações (racionais) e nem os irracionais, porém tinham conhecimento da existência destes, contornando este conflito pelo uso da Geometria para expressar estes números, o que gerou a crise dos incomensuráveis.

A crise dos incomensuráveis, que historicamente é relatada como o surgimento dos números irracionais[1] também define melhores contornos para os números racionais.

> Apesar de os egípcios e os povos da mesopotâmia utilizar frações e números decimais, nosso estudo mostra que somente após a identificação das grandezas incomensuráveis é que surgem de uma forma mais definitiva os próprios números racionais (BROLEZZI, 1996, p. 46)

A relação entre os números irracionais e racionais ocorre por meio da operação de aproximação. A representação decimal dos números irracionais é necessariamente infinita e não periódica. A única via de acesso a um número:

> (...) irracional é a utilização de aproximações sucessivas através de números racionais. (...) Ainda hoje, [isto] parece desconcertar todos os que enfrentam os irracionais. (...) Negando o estatuto de números as razões entre grandezas que conduziam aos irracionais, foi possível aos gregos viver praticamente ao largo de tais objetos indesejáveis. Há muito se sabe, no entanto, que a maioria absoluta, a quase totalidade dos números reais existentes é constituída por números irracionais (MACHADO, 1990, p. 43-44).

Do ponto de vista didático, o recurso a situações contextuadas permite ilustrar a utilização das Frações Contínuas e explorar uma série de procedimentos alternativos. Aliado a este fator, a exploração de diversas estratégias de resolução, conforme recomendam Echeverría e Pozo (1998), em se considerando o ensino secundarista, permite introduzir situações de ensino contextuadas nas Frações Contínuas, cujo mote permite resgatar propriedades fundamentais dos números reais e articular diversos temas do currículo.

---

[1] Gonçalves; Possani (2010) situam evidências colocando em discussão a Crise dos Incomensuráveis. Para os autores os antigos gregos lidavam naturalmente com a questão da relação entre a diagonal e o lado do quadrado, através da Álgebra Geométrica, não existindo uma crise de conhecimento para tal povo.

As Frações Contínuas e as boas aproximações.

A seguir, será realizada uma breve exposição de estratégias que podem ser exploradas para aproximar um número irracional por um número racional.

Um primeiro contexto que caracteriza este tipo de situação remonta ao século XVI. O físico holandês Christiaan Huygens utilizou as frações contínuas para a construção de instrumentos científicos, e, em particular, elaborou um modelo reduzido do sistema solar. Para a construção do modelo mecânico necessitava das relações de transmissão entre as engrenagens, o que permitiria reproduzir as órbitas planetárias numa escala adequada.

Vamos reeditar o problema de determinar o modelo da órbita do planeta Saturno em relação ao Sol. Na época de Huygens, acreditava-se que o tempo necessário para o planeta Saturno orbitar o Sol era de 29,46 anos[2]. Para modelar este sistema faz-se uso de duas engrenagens, uma com uma 'x' dentes e a outra com 'y' dentes, de modo que $\frac{x}{y} = 29{,}43$.

Huygens elaborou algumas aproximações racionais para a razão 29,43, tendo obtido: $\frac{29}{1}, \frac{59}{2}, \frac{206}{7}$. Este último valor permitiu uma escolha de engrenagens com 7 e 206 dentes, relacionada com aspectos práticos, pois é difícil usinar engrenagens com um número muito pequeno ou muito grande de dentes.

Para verificar como Huygens obteve estes valores, utilizaremos o procedimento aritmético. O 1º convergente é dado por $c_0 = a_0 = 29$. O 2º convergente é dado por $c_1 = a_0 + \frac{1}{a_1}$, ou ainda, $c_1 = 29 + 0{,}43 = 29 + \frac{1}{2{,}32558} = 29 + \frac{1}{2} = \frac{59}{2} \approx 29{,}5$. Já o 3º convergente: $c_2 = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}} = 29 + \frac{1}{2{,}32558} = 29 + \frac{1}{2 + 0{,}32558} = 29 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}} = \frac{206}{7} \approx 29{,}43$.

Se fossemos determinar o 4º convergente teríamos como resultado a fração $\frac{2737}{93}$, uma aproximação melhor que a anteriores, mas que resulta em números de dentes impraticáveis.

A situação anterior ilustra de modo simples os motivos pelos quais as Frações Contínuas representam a melhor aproximação de números irracionais em situações práticas, assim como representa uma alternativa para iniciar uma exposição didática deste assunto.

---

[2] Este valor é uma aproximação racional de um número real, que atualmente foi estabelecido como 29,43 anos.

No ensino básico, a definição dos números irracionais como os números reais que não podem ser expressos por uma fração de números inteiros pode levar a simplificações e a não entendimento pelo aluno do significado inerente aos irracionais.

Sabemos que a única via de acesso a um número irracional é a utilização de aproximações sucessivas através de números racionais. Na Matemática, este aspecto serve para caracterizar os números irracionais.

Para ilustrar tal aspecto, propomos outra situação-problema: Um fabricante de relógios precisa produzir dois tipos de rodas dentadas na razão $\sqrt{2}:1$, sendo impraticável que estas rodas tenham mais que 20 dentes. Encontre algumas possibilidades para os números de rodas que irão aproximar a razão desejada.

A Relação de transmissão, da coroa (engrenagem maior) para o pinhão (engrenagem menor), pode ser representada por $\frac{x}{y}=\sqrt{2}$, onde 'x' representa o número de dentes da coroa e 'y' representa o número de dentes do pinhão, sendo x, y inteiros positivos.

Para representar a raiz na forma de frações contínuas, o primeiro procedimento que faremos uso é o que denomino aritmético. Este consiste em escrever, seqüencialmente, os convergentes, até se obter uma fração que responda a questão, ou seja, que respeite a condição de contorno dada pelo limite de 20 dentes, para a engrenagem maior (coroa).

$$c_0=\sqrt{2}=1{,}4142136=1 \ \ (1^{\circ}\mathit{convergente})$$

$$c_1=\sqrt{2}=1{,}4142136=1+0{,}4142136=1+\frac{1}{2{,}4142136}\approx 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\,(2^{\circ}\mathit{convergente})$$

$$c_2=1+0{,}4142136=1+\frac{1}{2{,}4142136}=1+\frac{1}{2+0{,}4142136}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{2{,}4142133}}\approx 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}=\frac{7}{5}\,(3^{\circ}\mathit{convergente})$$

$$c_3=1+\frac{1}{2+\frac{1}{2{,}4142133}}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+0{,}4142133}}\approx 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}\approx 1+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{5}{2}}}=1+\frac{1}{\frac{12}{5}}=\frac{17}{12}\,(4^{\circ}\mathit{convergente}).$$

O 4º convergente revela que o nº de dentes da coroa seria 17 e o do pinhão 12, com aproximação dada por: 17/12 = 1,4166667, o que proporciona uma aproximação correta até a ordem das centenas, que para um par de engrenagens usuais é satisfatória.

Determinando-se o 5º e o 6º convergente, tem-se:

$$c_4 = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2{,}4142151}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + 0{,}4142151}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2{,}4142046}}}} \approx \frac{41}{29}$$

$$c_5 = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2{,}4142046}}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + 0{,}4142046}}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2{,}4142658}}}}} \approx \frac{99}{70}$$

Observa-se, nos seis primeiros convergentes, que existe uma repetição do algarismo 2. Será que tal conjectura é verdadeira? Para verificá-la, de modo mais geral, podemos escrever um segundo procedimento, de natureza algébrica.

De $\sqrt{2} = 1{,}4142136 = 1 + \frac{1}{x_1}$, *donde* $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{x_1}$.

Ainda, de $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{x_1} \Rightarrow \sqrt{2} - 1 = \frac{1}{x_1} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{\sqrt{2} - 1}$, que resulta $x_1 = \sqrt{2} + 1$.

Daí, $x_1 = \sqrt{2} + 1$. *Como* $\sqrt{2} > 1$, *então* : $x_1 = \sqrt{2} + 1 = 1 + 1 + \frac{1}{x_2} = 2 + \frac{1}{x_2}$. Assim:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{x_1} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{x_2}}.$$

De: $x_1 = \sqrt{2} + 1 = 2 + \frac{1}{x_2} \Rightarrow \sqrt{2} + 1 = 2 + \frac{1}{x_2} \Rightarrow \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{x_2} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = x_1$.

Assim, por substituições sucessivas:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{x_1} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{x_2}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{x_3 + \ldots}}} = [1;2;2;2;2;\ldots] = [1;\overline{2}].$$

Esta abordagem exemplifica o fato que um número irracional tem representação infinita na forma de fração contínua, mas não existe correspondência inversa. Por outro lado, um número racional tem uma representação finita na forma de frações contínuas. Esta possibilidade de apresentação dos números irracionais permite esclarecer uma distinção básica com relação aos números racionais.

Um terceiro procedimento para expressar uma fração contínua é dado por Bombelli (séc. XVI) e consiste na expressão:

$$x=\sqrt{N}=\sqrt{a^2+b}=a+\cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+.....}}}.$$

A demonstração de tal expressão é fornecida abaixo.

$$\sqrt{N}=\sqrt{a^2+b}, tem-se: N=a^2+b \Rightarrow N-a^2=b \Rightarrow (\sqrt{N}-a).(\sqrt{N}+a)=b \Rightarrow (\sqrt{N}-a)=\frac{b}{\sqrt{N}+a}$$

Mas: $\sqrt{N}-a=\dfrac{(\sqrt{N}-a).(\sqrt{N}+a)}{\sqrt{N}+a}=\dfrac{N-a^2}{\sqrt{N}+a}=\dfrac{b}{\sqrt{N}+a}=\dfrac{b}{2a+\sqrt{N}-a}$. Aplicando-se o resultado acima: $\sqrt{N}-a=\cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\sqrt{N}-a}}=\cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+...}}}\Rightarrow \sqrt{N}=a+\cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+...}}}$.

No caso da representação de $\sqrt{2}$ como fração contínua, tem-se:

$$\sqrt{2}=\sqrt{1^2+1}=1+\cfrac{1}{2.1+\cfrac{1}{2.1+\cfrac{1}{2.1+...}}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+...}}}=[1;2,2,2,...]=[1;\overline{2}].$$

Considerações Finais

As considerações tecidas neste texto revelam possibilidades de abordagem das Frações Contínuas Simples no Ensino Básico, considerando-a como uma oportunidade de atualização do currículo de Matemática, sem necessariamente recorrer a algoritmos.

O trabalho com o tema das aproximações revela uma articulação entre os conjuntos dos Números Racionais e o conjunto dos Números Irracionais, conjuntos distintos do ponto de vista da teoria dos Conjuntos. A própria natureza do tema permite esclarecer e ampliar o próprio conceito de fração, assim como promover um maior entendimento envolvendo a natureza dos números irracionais, numa abordagem que revela a elegante interação entre a natureza discreta e finita, em contrapartida da natureza contínua e infinita dos números reais.

Aliam-se a estas considerações a oportunidade propiciada pela introdução de um tema que articula diversos conceitos matemáticos usuais no ensino básico, revalorizando-os pela possibilidade da ampliação da relação constituída internamente a matemática, permitindo a construção de uma rede de significados, conforme Machado (1995).

Em relação às contribuições de ordem didática, ao se realizarem aproximações das raízes não-exatas, que representam números irracionais, o recurso à introdução das frações contínuas como tema mediador possibilita a utilização de diversas estratégias de abordagem na resolução de problemas envolvendo frações contínuas, a partir da abordagem aritmética, ativando o uso da estratégia algébrica, favorecendo o desenvolvimento das competências pessoais dos alunos.

As Frações Contínuas representam uma das possibilidades de abordar significativamente os números irracionais no ciclo básico: um número é irracional se a representação em forma de fração contínua for infinita. Caso a representação seja finita, o número é racional. Esta forma de abordagem elimina a circularidade na apresentação dos números reais, delimitando os aspectos finitos e infinitos, exatos e aproximados, discretos e contínuo, de forma simples e envolvendo conteúdos acessíveis aos alunos do ciclo básico.

Referências Bibliográficas:

BOYER, C. B. **História da Matemática.** 9. ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1991.

BROLEZZI, A. C. **A Tensão entre o Discreto e Contínuo na História da Matemática e no Ensino da Matemática.** 1996. Tese (Doutorado em Educação), Universidade de São Paulo, São Paulo.

BRUNER. S. J. **O Processo da Educação**. 8. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1987.

CUNHA, M. O. **Sobre a idéia de algoritmo**. São Paulo: SEMA/USP, 2007. Disponível em: <www.educarede.org.br/.../2007-06-01-Sobre_o_conceito_de_algoritmo.doc >.

ECHEVERRÍA, M. P. P.; POZO, J. I. Aprender a Resolver Problemas e Resolver Problemas para Aprender. In: POZO, J. I. (org). **A Solução de problemas**: Aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: ArtMed, 1998. Cap. 1. p. 13-42.

FISCHBEIN, E.; JEHIAM, R.; COHEN, D. **The Concept of Irrational Numbers in High-School Students and Prospective Teachers. Educational Studies in Mathematics.** v. 29, n. 1, jul. 1995, p. 29-44. Disponível em: <www.jstor.org/stable/3482830>. Acesso em 12 dez. 2011.

GONÇALES, C H. B.; POSSANI, C. **Revisitando a Descoberta dos Incomensuráveis na Grécia Antiga.** Matemática Universitária, n. 47, 2010. Dsiponível em: <www.each.usp.br/.../Gonçalves_C_H_B_Possani_C_2010>. Acesso em 12 dez 2011.

MACHADO, N. J. **Epistemologia e Didática**: As Concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente. São Paulo: Editora Cortez, 1995. 320 p.

_______________. **Matemática e Língua Materna:** Análise de uma impregnação mútua. São Paulo: Editora Cortez, 1990, 169 p.

PALIS, G. L. R. **Educação Matemática:** entrelaçando pesquisa e ensino, compreensão e mudança. Revista Educação On-Line, n.1, 2005. Disponível em: <http://www.maxwell.lambda.ele.puc-rio.br/rev_edu_online.php?strSecao=show11&fas=12>. Acesso em 12 jan. 2012.

REZENDE, W. M. **O Ensino de Cálculo:** Dificuldades de Natureza Epistemológica. 2003. Tese (Doutorado em Educação). Universidade de São Paulo, São Paulo.

Ripoll, C. C. **A Construção dos Números Reais nos Ensinos Fundamental e Médio**. UFRGS, 2001.

SANTALÓ, L. Matemática para não-matemáticos. In: PARRA, C.; SAIZ, I. **Didática da Matemática**: Reflexões Psicopedagógicas. Tradução de: Juan Acuña Llorens. Porto Alegre: ArtMed, 1996. Cap. 1. p. 11-24.

SANTOS, J. C. **NÚMEROS REAIS:** UM DESAFIO NA EDUCAÇÃO BÁSICA. CENTRO DE ESTUDOS GERAIS, INSTITUTO DE MATEMÁTICA. Niterói, 2007.

SÃO PAULO. **Proposta Curricular do Estado de São Paulo**: Matemática/ Ensino Fundamental (ciclo II) e Médio. São Paulo: SEE, 2008.

SILVA, A. L. V. **NÚMEROS REAIS NO ENSINO MÉDIO**: IDENTIFICANDO E ANALISANDO IMAGENS CONCEITUAIS, 2011. Disponível em: <http://www.anped.org.br/app/webroot/34reuniao/images/trabalhos/GT19/GT19-1115%20res.pdf>. Acesso em 20 dez. 2011.

SIROTIC, N.; ZAZKIS, R. **IRRATIONAL NUMBERS**: THE GAP BETWEEN FORMAL AND INTUITIVE KNOWLEDGE. Educational Studies in Mathematics, 2007. p. 49–76. Disponível em: <http://blogs.sfu.ca/people/zazkis/wp-content/uploads/2010/05/2007-irrationals-gap-formal-intuitive.pdf>. Acesso em: 11 ago. 2011.

VOSKOGLOU, M; KOSYVAS, G. **A study on the comprehension of irrational numbers.** Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics), n. 21, 2011. Disponível em: <http://math.unipa.it/~grim/Voskoglou%20Kosyvas_Q21.pdf>. Acesso em: 11 ago. 2011.

ZAZKIS, R.; SIROTIC, N. **MAKING SENSE OF IRRATIONAL NUMBERS:** FOCUSING ON REPRESENTATION. Proceedings of the 28th Conference of the International. Group for the Psychology of Mathematics Education, 2004. v. 4 p. 497–504. Disponível em: http://www.emis.de/proceedings/PME28/RR/RR082_Zazkis.pdf>. Acesso em: 08 ago. 2011.