MOMENTOS DE ESTUDO VIVENCIADOS NA RESOLUÇÃO DE UM PROBLEMA DE GEOMETRIA ANALÍTICA

Edneia Silveira Almeida[1]

Rafael de Oliveira Ramos[1]

Antonio Sales[2]

Resumo: O presente trabalho é resultado de uma experiência vivenciada por acadêmicos de um curso de licenciatura em computação durante as aulas de Geometria Analítica. A atividade fora proposta com o objetivo de observar a aplicabilidade da Teoria Antropológica do Didático no que diz respeito aos momentos didáticos discutidos pelos proponentes da Teoria. Apresenta um trabalho desenvolvido por acadêmicos e na articulação entre teoria e prática é possível observar e vivência dos referidos momentos.

Palavras-chave: Momentos Didáticos. Equação do Plano. Situação Didática.

Introdução

A experiência descrita a seguir foi vivenciada por nós acadêmicos de Curso de Computação-Licenciatura da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, Unidade de Nova Andradina (UEMS/NA) e foi proposta como parte de um trabalho da disciplina de Geometria Analítica, ano 2012.

Estudávamos a equação do plano quando nos deparamos com o desafio proposto de determinar a equação de um plano que se apoiasse sobre uma palmeira, uma luminária e um banco de jardim, todos situados no pátio da universidade e que podiam ser vistos da janela da sala de aula (figs.1 e 2). Os dados satisfaziam ao postulado da “determinação do plano” segundo o qual “um plano pode ser determinado [...] por três pontos não-colineares” (GONÇALVES JUNIOR, 1995, p. 180).

Analiticamente, três pontos não-colineares são suficientes para se determinar as equações de um plano. Dessa condição inicial é possível determinar dois vetores contidos no plano e um vetor normal ao mesmo plano (MACHADO, 1982).

[1] Acadêmicos do primeiro ano do curso de Computação-Licenciatura da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, Unidade de Nova Andradina. neia_grc@hotmail.com; rafael-20111931@hotmail.com

[2] Professor de Geometria Analítica no curso de Computação-Licenciatura da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, Unidade de Nova Andradina, ano 2012. profesales@hotmail.com

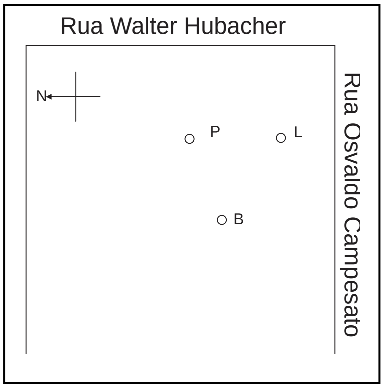

Figura 1- Esboço da localização dos objetos no pátio da Universidade. Elaborado pelos autores.

Figura 2- Fotografia do local.
Obtida com máquina digital dos autores.

O problema era mais complexo do que se supunha no início porque apesar de serem objetos concretos, isto é, palpáveis, a sua localização em um referencial cartesiano não estava definida. Discussões sucessivas sugeriram a adoção de um referencial a partir das ruas que delimitam o pátio da universidade. No sentido anti-horário as ruas são: Rua Walter Hubacher, Rua Florêncio de Matos, Rua Sete de Setembro e Rua Osvaldo Campesato. Considerando que a universidade tem como referência postal a Rua Walter Hubacher adotamos a mesma como um dos eixos (abscissa) e considerando ainda que os objetos sobre os quais o plano deveria se apoiar estavam situados mais próximo da Rua Osvaldo Campesato, ela foi adotada como a ordenada.

A intersecção entre as duas ruas ficou sendo a origem do sistema e como direção adotamos o padrão da Geografia segundo a qual os sentidos Leste e Norte são positivos. Dessa forma os objetos estavam situados no quarto quadrante.

Este foi o primeiro passo: definir o referencial e situar os objetos em relação a ele determinando o quadrante em que estavam localizados.

O passo seguinte consistiu em determinar as medidas da altura dos objetos e a distância em relação ao referencial adotado. Uma trena de 30 metros permitiu determinar as distâncias, ao nível do solo e com pequenos ajustes devido ao desnível do terreno, dos objetos às coordenadas. O trabalho manual realizado em etapas (em decorrência do tamanho da trena) ocasionou aproximações e pequenos ajustes. Dessa forma as coordenadas no plano xOy ficaram determinadas ficando evidente a dificuldade de operacionalizar a teoria sem instrumental adequado.

O terceiro passo consistiu em determinar a cota ou altura dos objetos em relação o nível do solo, isto é, em relação o pé da palmeira por ser este o objeto mais alto e que mais se destaca. Para isso buscamos na literatura informações sobre o Teorema da Proporcionalidade atribuído a Tales de Mileto.

A sugestão de utilizar o mesmo princípio utilizado por Tales veio de um professor de Programação a quem recorremos em busca de ideias que pudessem contribuir par a solução do problema.

Segundo a tradição Tales afirmou que dado um feixe de retas paralelas, se elas forem cortadas por duas retas transversais então ficarão determinados, sobre as paralelas, segmentos proporcionais (LINTZ, 1999).

É atribuído também a este sábio a façanha de ter determinado a altura da pirâmide no deserto egípcio com a ajuda de um bastão (BOYER, 1996).

Seguindo esse raciocínio foi escolhido um dia ensolarado, num horário em que a sombra não estivesse muito grande para evitar grandes distorções em virtude do desnível acentuado do terreno na direção da sombra, e adotado como padrão a altura de um dos componentes da dupla que é de 1,74m. Mesmo com todos esses cuidados ainda ocorreu um problema com a sombra da palmeira que, devido a sua proximidade como o bloco de aulas e um corredor coberto, parte da mesma sempre ultrapassava o espaço livre disponível e se projetava sobre uma área coberta nas proximidades. A copa da palmeira foi estimada em dois metros em decorrência dessa dificuldade.

O terreno também possui uma declividade acentuada (fig. 2) nas proximidades do banco e em decorrência disso a sua altura ficou igual a zero em relação à base da palmeira que está num plano mais próximo ao nível da na rua.

O Referencial Teórico

Considerando que a intenção é analisar o processo sentimos a necessidade de adotar um referencial teórico que permita essa análise. Para tanto recorremos à Teoria Antropológica do Didático (CHEVALLARD; BOSCH; GASCON, 2011).

O estudo da Matemática em um curso de licenciatura dever levar em conta o preparo dos sujeitos para a atividade docente. Necessita que sejam trabalhados alguns fatores que conduzam à elaboração de uma organização didática que proporcione a vivência de momentos de estudo (CHEVALLARD, 2001) e também situações didáticas onde entram em jogo fatores que promovam desequilíbrios e oportunizem a experiência de “situações adidáticas” (BROUSSEAU, 2008, p.53), isto é, situações não previstas originalmente, mas que exigem tomadas de decisões sem a intervenção do professor.

Sobre a importância de se oportunizar a vivência de situações adidáticas os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) destacam a questão da autonomia necessária ao estudante para fazer frente às mudanças tecnológicas nos meios de produção.

Destaca ainda, o documento citado, a complexidade sempre crescente da sociedade que exige a produção e incorporação de informação novas em curtos espaços de tempo. É nesse contexto que se justifica a exposição do estudante a desafios ou situações problematizadas que oportunizem a vivência dessa autonomia.

Consta no documento que:

> Essas características dominantes neste final de século imprimem novos sistemas organizacionais ao trabalho. Sistemas que exigem trabalhadores versáteis, dotados de iniciativa e autonomia, capazes de resolver problemas em equipe, de interpretar informações, de adaptar-se a novos ritmos e de comunicar-se fazendo uso de diferentes formas de representação (BRASIL, 1998, p. 34).

Considerando o exposto em parágrafos anteriores é que são propostos problemas não convencionais durante as aulas de Geometria Analítica para o curso de Licenciatura em Computação. Os problemas envolvem os conceitos estudados, porém, estão envoltos por uma situação em que são vivenciados, pelos sujeitos que os aceitam, diversos momentos de estudo, isto é, e em que situação adidática se faça presente.

O trabalho apresentado a seguir é resultado de um problema proposto com a finalidade de produzir momentos de estudo na perspectiva da Teoria Antropológica do Didático (TAD) de Chevallard, Bosch e Gascón (2011). Esses autores defendem que as ações desenvolvidas no estudo da matemática não acontecem de forma isolada e, observando que há certa regularidade nessas ações, conceberam o conceito de momentos didáticos ou momentos de estudo.

Os momentos de estudo, segundo Chevallard (2001) e Chevallard, Bosch e Gascón (2001) são vivenciados por todos que assumem a postura de estudar matemática. Uma pessoa pode estudar matemática para responder a uma questão imediata sua ou de algum amigo que solicita a sua ajuda. Nessa concepção uma pessoa estuda quando assume a responsabilidade pela solução de um problema. Para isso mobiliza seus conhecimentos e busca outras informações pertinentes de modo que o problema seja resolvido. Essa pessoa utiliza uma matemática conhecida e produz uma matemática para quem não a conhece, porque produz uma resposta matemática e estabelece uma certeza com base em fundamentos matemáticos.

Há os que estudam por outras razões como a intenção de ensinar alguém ou produzir uma matemática nova. Em todos os três casos se diz que houve uma criação. Nos primeiro caso que é o caso específico deste trabalho, a criação consiste no cultivo da ciência e na reformulação de conceitos. Ocorre a criação de uma nova vivência com a matemática, uma revitalização desse saber. Os conhecimentos produzidos não serão novos em termos de vir à existência, mas serão novos por estarem sendo vistos sob uma nova ótica ou vistos por quem nunca os tinha visto antes.

Em cada um dos casos o sujeito envolvido no processo vive diferentes momentos de estudo. O momento em que se depara com o problema pela primeira vez ou que recebe o desafio de resolver uma tarefa que ainda não resolvera antes, como no caso em pauta. Se o desafio é aceito, se o problema é assumido, passa-se a viverem outros momentos sucessiva ou simultaneamente. Este é o primeiro momento, o momento do encontro com a tarefa ou pode ser um reencontro. Há casos em que já se estudou sobre determinado tema sem a preocupação de fazer dele objeto de reflexões posteriores. No entanto, uma questão desse mesmo tema pode reaparecer com nova roupagem ou como uma necessidade.

O envolvimento com o desafio leva o sujeito a procurar informações complementares e modelos parecidos. Procurar uma técnica existente, encontrar uma fórmula, que possa ser adaptada ou sugerir ideias para a produção de outra técnica.

Este é o momento em que se está ampliando o conhecimento sobre o tema de estudo em que o problema está situado e construindo um discurso que nos convença que o problema é solúvel. A TAD denomina esse segundo momento de exploração de tarefas‖ ou, melhor dizendo, exploração de tarefas similares e elaboração de uma técnica.

Uma vez encontrado o caminho, reunidas as ideias básicas necessárias, começa-se por viver o terceiro momento em que a técnica é experimentada, se necessário modificada, e aplicada. Mas esse momento também não acontece isolado, pois o trabalho com a técnica envolve reflexões sobre a sua pertinência, explicações, autoconvencimento e experimentações. Todo entorno teórico-tecnológico está sendo construído nesse momento. Também se denomina momento de construção de um ambiente favorável à resolução de uma tarefa.

Mas não basta resolver um problema. É preciso ter certeza de que a solução encontrada está correta. Chega o momento de conferir a técnica utilizada. Mas não basta verificar se ela resolveu bem aquele problema. Sentimos a necessidade de estar certos de que a solução encontrada não foi uma casualidade porque em alguns casos é possível que logo mais se descubra que contém equívocos que desmerecem o trabalho de quem produziu tal solução.

Neste quarto momento ocorre a certificação de que a técnica usada tem respaldo nos princípios teóricos da ciência. Esse momento de consolidação é fundamental para dar credibilidade ao trabalho. Todo trabalho produzido, seja ele matemático ou didático, necessita ser validado por uma teoria, ser explicado com base em um saber. Esse é o momento em que se avalia a técnica utilizada. A conclusão de uma organização didática sempre resulta em um conhecimento organizado, estruturado. Esse conhecimento é validado socialmente porque é fundamentado em uma teoria que recebeu o respaldo social. Tendo confirmado a validade da técnica; tendo sido mostrado e aceito o pressuposto de sua validade geral, surge a necessidade de divulgá-la. É o momento, segundo a TAD, da institucionalização da técnica.

Enfim, institucionalizar é dizer que está de acordo com as regras aceitas pelas instituições sociais, pela comunidade acadêmica.

Por fim, se houve o envolvimento pessoal, busca-se por uma forma sintética.

Procura-se pela redução do número de passagens por torná-la aplicável ao maior número de problemas possível. Vive-se então o momento didático da algebrização, da generalização, da transformação da técnica em uma regra geral. É o momento da melhoria da técnica, o sexto momento.

Esses momentos didáticos são concebidos como uma experiência pessoal ideal de quem estuda matemática. Por essa razão se constitui em um modelo para avaliar uma organização didática. Uma atividade matemática elaborada com a finalidade de envolver um grupo de estudantes na resolução de uma tarefa ou um tipo de tarefa deve levar em conta esses seis níveis de envolvimento e produção matemática. Nem sempre, no exercício da atividade de estudo é possível separar os momentos dada a simultaneidade em que ocorrem.

O Problema

Observando três objetos distintos do pátio é possível conceber três pontos também distintos. Imaginemos os pontos definidos pelo topo da palmeira(P), o ponto mais alto da luminária (L) situada no alto daquele poste e o banco(B) de jardim ali localizados (fig. 1). Imaginemos que uma folha de isopor está apoiada nesses três pontos, qual a equação do plano que serve de suporte para essa folha de isopor?

Objetivo

A atividade teve como objetivo inicial proporcionar ao acadêmico a oportunidade de vivenciar os momentos didáticos e verificar como esse processo se daria.

O Processo de Resolução

As equações de um plano são obtidas efetuando o produto escalar $\vec{n}.\overrightarrow{AP} = 0$ onde $\vec{n}$ é o vetor normal, A é um ponto do plano e P um ponto genérico, conforme demonstrado por Steinbruch e Winterle (1987).

A determinação da equação foi processada a partir das seguintes informações:

1. Com a trena foram obtidos os seguintes valores: P ($\frac{714}{10}, -23, z_p$), L($\frac{633}{10}, -23, z_L$) e B(55, -36, 0).

2. Para determinar a altura dos objetos (H_O) utilizou-se a altura do acadêmico (H_A), a medida da sombra do acadêmico (S_A) e as sombras dos objetos (S_O) sendo que H_A=1,74m; S_A=3,55m; S_P=15,50m e S_L=15,07m.

3. Fazendo $H_O = \frac{H_A.S_0}{S_A}$ obteve-se H_P=z_p=7,6 que acrescido de 2m atribuído à copa resulta em 9,6 m e H_L=z_L= 7,4 m. Dessa forma ficam determinados os três pontos: P ($\frac{714}{10}$,-23,$\frac{96}{10}$); L($\frac{633}{10}, -23, \frac{74}{10}$) e B(55, -36, 0)

4. Dois vetores foram determinados a partir desses pontos: $\vec{PL}$ e $\vec{PB}$, ou seja, $\vec{PL} = (\frac{-81}{10}, 0, \frac{-12}{10})$ e $\vec{PB} = (\frac{-164}{10}, -13, \frac{-96}{10})$.

5. O produto vetorial $\vec{PL} \wedge \vec{PB}$ resulta no vetor ($\frac{-156}{10}, \frac{-5970}{100}, \frac{1056}{10}$) que, segundo Steinbruch e Winterle (1987), é o vetor normal ao plano que contém P, L e B, ou seja, $\vec{n} = (-\frac{156}{10}, -\frac{597}{10}, \frac{1056}{10})$.

Tomando um ponto S(x,y,z) e o ponto B (55,-36,0) e fazendo o produto $\vec{n}.\overrightarrow{SB} = 0$ tem-se: **15,6x - 59,7y - 105,6z + 1219,2 = 0** que é a equação pedida.

Se arredondarmos para 16x-60y-106z+ 1220=0 teremos: 4x-15y-26,5z+305=0 ou z=(305+4x-15y)/26,5 cujo gráfico no *Winplot* é o a que se vê a seguir (fig. 3) e que se aproxima bastante do que era esperado. A inexatidão corre por conta das aproximações.

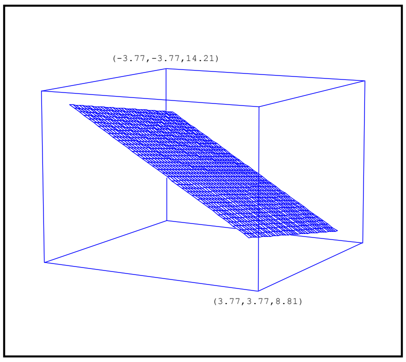

Figura 3 -Gráfico produzido no *Winplot* a partir da equação explícita do plano após os arredondamentos. Elaborado pelos autores.

Articulando Teoria e Prática

No problema proposto e aceito como desafio pelos acadêmicos que assinam este trabalho é possível ver a vivência dos momentos de estudo de que tratam Chevallard, Bosch e Gascón (2001).

O problema foi proposto e aceito. Não era um problema novo, se novo for entendido com o sentido de que nada se sabia sobre equação do plano. No entanto, era novo no sentido de que era a primeira vez que o problema focalizava algo possível de ser vivenciado com todas as complexidades do cotidiano. A ideia de estender uma lâmina de isopor sobre três pontos reais (uma palmeira, um poste e um banco de jardim), porém, com coordenadas ainda não determinadas e com um referencial ainda a ser construído, e determinar o plano de apoio a essa lâmina, era totalmente nova para os envolvidos no processo. Mas não bastou o desafio ser proposto. Foi preciso encontrar técnicas ou construí-las a partir de outros referenciais como os critérios utilizados pela Geografia para determinar as coordenadas geográficas. Foi necessário utilizar tecnologia não usual em sala de aula para localizar os pontos bem como consultar temas matemáticos abordados em outros domínios dessa ciência.

Vivenciava-se o segundo momento e também os momentos sucessivos quando testavam a validade da técnica, modificavam-na, e, por fim, institucionalizaram-na com base nos princípios estudados na disciplina da Geometria Analítica.

O gráfico construído no *Winplot* para verificar se a equação encontrada fazia sentido se insere no quarto momento. Dado ao fato de ter seguido as regras tanto da Geometria Analítica como da proporcionalidade, demonstradas por autores diversos, a técnica fica institucionalizada.

Referências:

BOYER, Carl B. História da Matemática. 2.ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher LTDA, 1966.

BRASIL. Secretaria de Educacao Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**:Matematica. Brasilia: MEC/SEF, 1998.

BROUSSEAU, Guy. **Introdução ao Estudo da Teoria das Situações Didáticas**: conteúdos e metodos de ensino. Sao Paulo: Atica, 2008

CHEVALLARD, Yves; BOSCH, Marianna; GASCON, Josep. **Estudar Matemáticas**: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.

CHEVALLARD, Yves. Aspectos problematicos de la formacion docente. **Conferencia impartida en las XVI Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación em Didáctica de las Matemáticas (SI-IDM**), Escuela de Magisterio de Huesca, Universidad de Zaragoza, 1 de abril de 2001.

GONÇALVES JUNIOR, Oscar. **Matemática por Assunto, volume 6**: geometria plana espacial. 3. ed. São Paulo: Scipione, 1995.

LINTZ, Rubens G. **História da Matemática**. Blumenau, SC: Ed. Da FURB, 1999 (v.1).

MACHADO, Antonio dos Santos. **Álgebra Linear e Geometria Analítica**. 2. ed. São Paulo: Atual, 1982.

STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. **Geometria Analítica**. 2. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.