O USO DA FATORAÇÃO NA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO 2º GRAU POR ALUNOS DO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas[1]

Míriam do Rocio Guadagnini[2]

RESUMO

Este artigo tem como objetivo apresentar a análise de uma atividade referente à pesquisa em que se investigou a mobilização de registros numérico, algébrico e geométrico, por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, ao resolverem equações do segundo grau na forma completa, por meio de fatoração. Para atingir tal objetivo foram utilizados como referencial teórico a Teoria das Situações Didáticas, desenvolvida na França por Guy Brousseau (1986) e também a Teoria dos Registros de Representação Semiótica concebida por Raymond Duval (1995). O referencial metodológico no qual nos apoiamos foi a Engenharia Didática, conforme descrição de Artigue. Constatamos que no tratamento algébrico houve erros provenientes da manipulação algébrica e, dificuldade com a conversão do registro algébrico para o registro geométrico. Foi observado que a utilização numa mesma atividade dos registros algébrico e geométrico contribuiu para a busca dos erros e de resolução satisfatória, favorecendo o desenvolvimento de situações adidáticas de validação.

Palavras-chave: Fatoração. Registros de Representação Semiótica. Equação do 2º grau. Ensino Fundamental.

INTRODUÇÃO

A questão central de nossa pesquisa foi "Como a mobilização de diversos registros de representação, por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, pode se manifestar na apreensão da resolução de equações do 2º grau completas, por meio da fatoração?" Desse modo, definimos como objetivo geral: "analisar a mobilização de registros numérico, algébrico e geométrico, por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, para resolver equações do segundo grau na forma completa, utilizando o método do completamento do quadrado".

Visando alcançar o objetivo geral proposto em nossa pesquisa, elencamos os seguintes objetivos específicos:

- Investigar e analisar a mobilização de registros numérico, algébrico e geométrico na fatoração por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental;

[1] Professor – CCET- UFMS - Campo Grande – MS, joseluizufms2@gmail.com

[2] Mestranda em Educação Matemática – UFMS – Campo Grande – MS, miriamguadagnini@hotmail.com

- Investigar e analisar dificuldades dos alunos quanto ao tratamento e conversão nos registros utilizados na resolução de equações do 2º grau;
- Estudar dificuldades dos alunos em passar de casos particulares à formula geral de resolução da equação do segundo grau, por meio da fatoração.

REFERENCIAL TEÓRICO E METODOLÓGICO

Para atingir estes objetivos, os elementos teóricos empregados foram essenciais. Desse modo, as bases teóricas que nortearam nossa pesquisa, tanto na elaboração, quanto no desenvolvimento e análise da sequência de atividades foram: a Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1986) e a Teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval (2003). Para o desenvolvimento da parte metodológica nos guiamos pelos princípios metodológicos da Engenharia Didática, segundo descrição de Artigue (1995).

Da Teoria das Situações Didáticas utilizamos o conceito de situação adidática, em particular a de validação. Além disso, utilizamos também a situação de institucionalização. As situações adidáticas são momentos importantes para o trabalho didático, pois o sucesso nelas significa que o aluno tomou o problema para si, refletiu, supôs formas de resolução a partir da sua compreensão matemática, independentemente do professor.

Uma situação adidática pode ser de ação, formulação e de validação. Caracterizamos como situação de ação quando o aluno apresenta uma resolução para um determinado problema, sem se preocupar com uma explicação teórica. Já uma situação de formulação acontece quando o aluno utiliza um conhecimento teórico para proceder à resolução em uma linguagem matemática mais formal. E por fim, uma situação de validação se caracteriza quando, o aluno é capaz de verificar a validade de sua resolução. Para Freitas (2010, p. 98) "são aquelas em que o aluno já utiliza mecanismos de prova e em que o saber é usado com essa finalidade". Contudo, utilizamos a situação adidática de validação, procurando analisar como se dá o processo de validação da atividade proposta ao aluno, bem como, instigando-o a realizá-la. Na resolução de uma equação, se o aluno substitui as raízes encontradas na equação para verificar se ela satisfaz a equação, ele estará realizando uma validação, bem como fazendo uso de um segundo registro, no caso o registro numérico.

O momento de validação ocorre de forma independente do professor, no entanto, no momento da institucionalização a responsabilidade pelo saber matemático é do professor, embora deva ser realizado com a participação dos alunos, de modo que dialoguem sobre os conhecimentos construídos ao longo da atividade.

Conforme já foi dito, além da Teoria das Situações Didáticas, utilizamos também a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, concebida por Raymond Duval. Com o auxílio da Teoria dos Registros é possível analisarmos se o aluno mobiliza os diversos registros propostos nas atividades, e as dificuldades que eles encontram.

Duval (2003) apresenta dois tipos diferentes de transformações entre registros de representação semiótica: os **tratamentos** e as **conversões**. Um tratamento é quando há transformação dentro de um mesmo registro e uma conversão é quando é feita uma mudança de um registro a outro.

O **tratamento** de uma representação, para Damm (2010, p. 179) "é uma transformação dessa representação no próprio registro onde ele foi formado, sendo o tratamento uma transformação interna a um registro". A resolução de uma equação, inequação ou sistemas de equações, representa um tratamento: ao resolvê-los continuamos representando-os algebricamente. O tratamento exige regras próprias a cada registro (cálculo numérico, cálculo algébrico, entre outros) e sua natureza varia de um registro a outro.

A **conversão** de uma representação para Damm (2010, p. 179) "é a transformação dessa em uma representação em outro registro, ou seja, a conversão se dá entre registros diferentes", podendo conservar totalmente ou em parte o objeto matemático em estudo. As representações semióticas podem ser convertidas em representações equivalentes em outro sistema semiótico. Portanto, converter uma representação é mudar a forma pela qual um conhecimento é representado.

Em nossa pesquisa utilizamos como referencial metodológico a Engenharia Didática. Ela recebeu esta denominação por assemelhar-se ao trabalho do engenheiro, que necessita de conhecimentos científicos para aplicar e adaptar a realidade onde vai atuar. Para sua concretização é preciso seguir quatro etapas distintas, a saber:

Análise preliminar: É realizada observando os objetivos da pesquisa e deve conter uma análise epistemológica do conteúdo, uma análise do ensino atual deste conteúdo e seus efeitos, bem como das concepções e dificuldades dos alunos e dos entraves na dimensão didática e cognitiva. Em nosso trabalho destacamos textos que serviram como norteadores nesta etapa como: o completamento do quadrado nas formas algébrica e geométrica em livros didáticos, as recomendações contidas nos Parâmetros Curriculares Nacionais e em outros documentos oficiais acerca do ensino deste conteúdo matemático e a descrição de dificuldades apresentadas no processo de aprendizagem de equações do 2º grau, por meio da análise de pesquisas realizadas.

Concepção e análise *a priori:* Nesta etapa é feita uma descrição e previsão em que o pesquisador escolhe as variáveis que considera pertinentes para o problema estudado, analisa o desafio dado aos alunos, descreve o comportamento esperado dos alunos, seus significados e suas expectativas. Isto é feito para cada atividade da sequência. É a fase da construção da sequência didática.

O objetivo da análise *a priori* é determinar como as escolhas realizadas permitem controlar o comportamento do aluno e o sentido desse comportamento. A análise *a priori* abarca descrição e previsão dos fenômenos. Para a concretização dessa etapa em nossa pesquisa, foi organizada uma sequência didática composta por três blocos de atividades, nos quais previmos possíveis estratégias de resolução, bem como dificuldades dos alunos; foram descritas as variáveis didáticas que julgamos pertinentes por apresentarem características específicas que, dependendo de sua complexidade, podiam provocar alterações nas estratégias de resolução das atividades realizadas pelos alunos.

Experimentação: Em nosso trabalho, a fase da experimentação, foi materializada pela aplicação de uma sequência de atividades a um grupo de 14 alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, que ainda não havia estudado a resolução da equação do 2º grau por meio da fatoração.

Análise *a posteriori* e validação: É nesta etapa que ocorre a conclusão do trabalho. Assim, analisamos os dados coletados e confrontamos com a análise *a priori* para validar ou refutar as hipóteses levantadas.

PRODUÇÕES DOS ALUNOS DIANTE DAS ATIVIDADES PROPOSTAS

Nossa sequência foi composta em 17 atividades. Apresentamos as análises de uma atividade proposta aos alunos.

16- Resolva as equações, usando a fatoração:

16.a) $(x-3)^2 = 9$	16.e) $x^2 + 4x + 3 = 0$
16.b) $4x^2 + 20x + 100 = 0$	16.f) $x^2 - 14x = -40$
16.c) $x^2 + 2x + 3 = 0$	16.g) $y^2 - 2y - 2 = 0$
16.d) $x^2 - 18x + 81 = 16$	

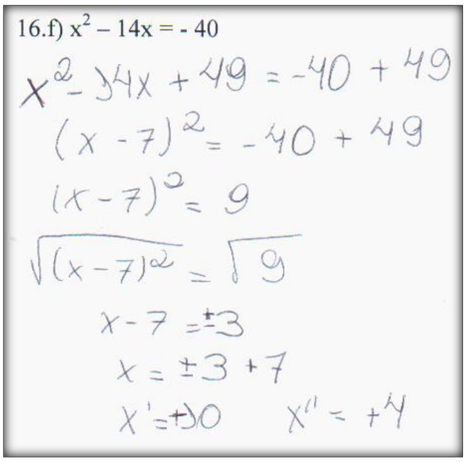
Na resolução algébrica das atividades 16.a e 16.d observamos que os alunos não tiveram dificuldade para compreensão e elas foram resolvidas com sucesso. A atividade (16.a) já estava na forma fatorada e a atividade (16.d) necessitava ser fatorada, bastando em seguida fazer uso de manipulações algébricas para obter as raízes dessas equações, levando-nos a crer que os alunos eram capazes de realizar os tratamentos no registro algébrico para equações que apresentavam baixo nível de complexidade. Apresentamos um trecho em que os alunos demonstram que mobilizam adequadamente o tratamento no registro algébrico.

Mariana: Você lembra como faz a (a)?
Karol: Esse daí tem que tirar a raiz, ele já tá ao quadrado, já tá fatorado.
*Mariana: Aí tira a raiz desse e desse, (*se refere aos dois membros da equação).
Karol: Acho que tá certo, é fácil.

Na resolução algébrica para equações que exigiam o completamento do quadrado como a atividade 16.c, observamos como as alunas Mariana e Karol resolveram.

Mariana: Acho que vai ter que arrumar essa também.
Karol: Como que arruma?
Mariana: Acho que aqui não tem que ser 3, acho que é 1 , daí 1 ao quadrado dá 1, 2 vezes 1 vezes 1 dá 2 e x ao quadrado dá x^2.
P: E agora o que tem que fazer?
*Mariana: Tem que isolar o 3 e somar 1 aqui e aqui (*leia-se: somar 1 nos dois membros da equação*)*
Karol: Tem que por 1 dos dois lados e o 3, coloca?
Mariana: Não você coloca igual a 3 mais 1.
Karol: É o 1 que coloca dos dois lados?
Mariana: É porque foi ele que completou o quadrado, agora tira a raiz dos dois lados.

Observando o raciocínio apresentado na resolução da equação, constatamos que uma das alunas compreendeu e resolveu corretamente no registro algébrico por meio do completamento do quadrado. O mesmo pudemos verificar ao observarmos a resolução da atividade 16.f, por outra equipe.


16.f) $x^2 - 14x = -40$

$x^2 - 14x + 49 = -40 + 49$

$(x-7)^2 = -40 + 49$

$(x-7)^2 = 9$

$\sqrt{(x-7)^2} = \sqrt{9}$

$x - 7 = \pm 3$

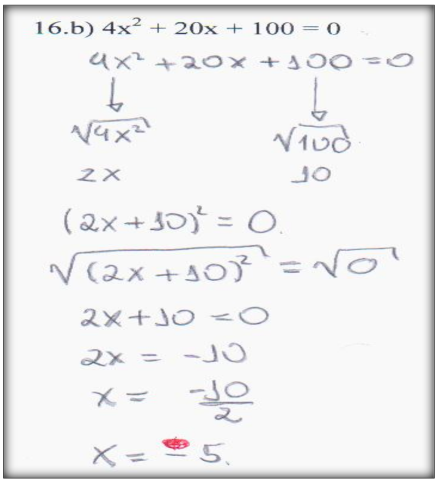
$x = \pm 3 + 7$

$x' = +10 \quad x'' = +4$

Protocolo 22: Atividade desenvolvida pelos alunos Will, Rafaela e Vinícius

Assim, pudemos inferir que os alunos tiveram condições de resolver a equação por meio da fatoração, quando havia uma expressão para a qual tinham que perceber a necessidade de completar o quadrado, a fim de torná-la um trinômio quadrado perfeito e em seguida fazer um tratamento no registro algébrico. Nas equações 16.a, 16.d e 16.f não identificamos dificuldades dos alunos com relação aos conceitos algébricos envolvidos.

Destacaremos a seguir erros de resolução cometidos por alguns alunos. Inicialmente, trataremos de erros no tratamento algébrico, principalmente os erros de manipulação algébrica e erros diversos de fatoração, semelhantes aos destacados por Nguyen (2006).


16.b) $4x^2 + 20x + 100 = 0$

$4x^2 + 20x + 100 = 0$

$\sqrt{4x^2}$ $\quad$ $\sqrt{100}$

$2x$ $\quad$ 10

$(2x+10)^2 = 0$

$\sqrt{(2x+10)^2} = \sqrt{0}$

$2x+10 = 0$

$2x = -10$

$x = \frac{-10}{2}$

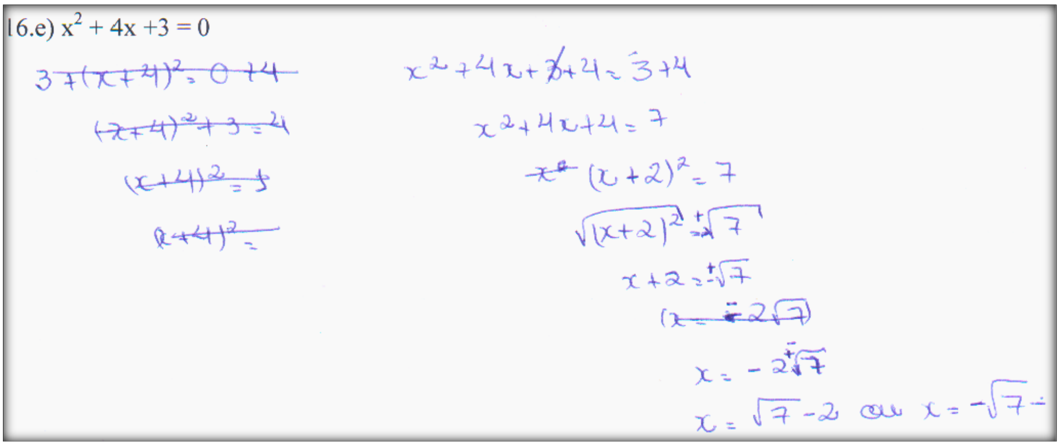
$x = -5$

Protocolo 23: Atividade desenvolvida pelos alunos Will, Rafaela e Vinícius

Nessa atividade (16.b), iniciaram fatorando a equação, obtendo $(2x + 10)^2 = 0$, que não corresponde à equação proposta; destacamos, pois, o erro relativo à fatoração, também elencado por Nguyen (2006). Verificamos que, ao fatorar, eles não procederam a verificação e mesmo ao encontrar a raiz da equação, não a validaram.

Na equação 16.e ($x^2 + 4x +3 = 0$), ao verificarem por meio da regra de fatoração que a equação dada não representava um trinômio quadrado perfeito, as alunas elaboraram algumas reflexões acerca da resolução da atividade.

Karol: Tem que arrumar essa equação[...]
Mariana: 2.2 é 4, significa que aqui vai ser 4 (se refere ao completamento do quadrado)*, aqui você escreve somando o 4 dos dois lados, lembra? O 3 não tá aqui, você colocou ele do outro lado.*
Karol: Aí vai ficar raiz de 7 menos 2 e menos raiz de 7 menos 2.
Mariana: Tem que ser mais?
Karol: Aí é menos.



16.e) $x^2 + 4x + 3 = 0$

~~$3+(x+4)^2 = 0+4$~~

~~$(x+4)^2+3=4$~~

~~$(x+4)^2=1$~~

~~$(x+4)^2=$~~

$x^2+4x+\cancel{3}+4=3+4$

$x^2+4x+4=7$

$(x+2)^2=7$

$\sqrt{(x+2)^2}=\pm\sqrt{7}$

$x+2=\pm\sqrt{7}$

~~$x=\pm 2\sqrt{7}$~~

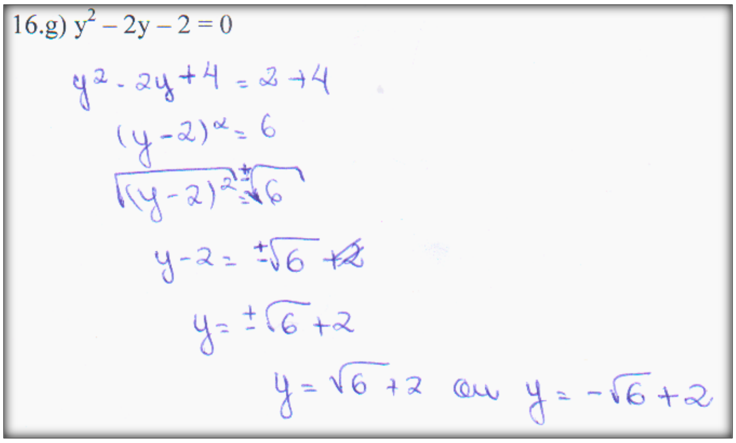
$x=-2\pm\sqrt{7}$

$x=\sqrt{7}-2$ ou $x=-\sqrt{7}-$

Protocolo 24: Atividade desenvolvida pelas alunas Karol e Mariana

Verificamos que as alunas apresentaram diversos erros de tratamento, na resolução algébrica da equação. Ao perceberem os erros, reiniciaram a resolução, no entanto, cometeram erro ao transpor o termo c=3 para o segundo membro da igualdade. Assim, obtiveram raízes erradas, e não procederam a validação por meio da verificação por substituição das raízes na equação dada.

No item 16.g, encontramos erros relativos ao completamento do quadrado.



16.g) $y^2 - 2y - 2 = 0$

$y^2-2y+4=2+4$

$(y-2)^2=6$

$\sqrt{(y-2)^2}=\pm\sqrt{6}$

$y-2=\pm\sqrt{6}+\cancel{2}$

$y=\pm\sqrt{6}+2$

$y=\sqrt{6}+2$ ou $y=-\sqrt{6}+2$

Protocolo 25: Atividade desenvolvida pelas alunas Karol e Mariana

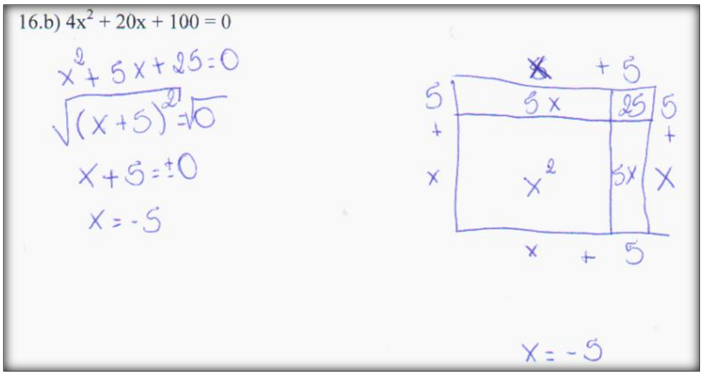
As alunas deveriam completar o quadrado com o número 1 e não com o número 4, não obtendo a forma fatorada, correta, $(y-1)^2$. Destacamos que realizaram corretamente a transposição do termo independente c =-2.

Ao final da resolução propusemos às alunas que escolhessem ao menos duas das equações propostas na atividade e que resolvessem geometricamente, a fim de analisarmos se mobilizavam este outro registro e as dificuldades que poderiam encontrar. Esse fato causou uma reação inesperada. A aluna Karol diz*: Só porque a gente não fez nenhuma, com menos, de jeito nenhum!* Assim, ficou explícito o modo de seleção da atividade para a resolução geométrica. Ressaltamos que o mesmo requisito para a escolha das equações foi verificado em outra equipe. Verificamos que, dentre a representação por meio do registro geométrico, a mais acessível aos alunos nos pareceu ser o de um quadrado da soma de dois termos, o que consideramos plausível, pois é o registro mais conhecido por eles.

Analisaremos, na sequência, os erros no tratamento algébrico e geométrico e na conversão para o registro geométrico em algumas atividades. No item 16.b ($4x^2 + 20x + 100 = 0$), as alunas iniciaram a resolução da equação simplificando por 4, a fim de obter uma equação mais simples, assim obtiveram $x^2 + 5x + 25 = 0$ e só a partir daí fatoraram, obtendo $(x +5)^2 = 0$.

Karol: 10 vezes10, 2 vezes 10 vezes 2 , não dá , tem que arrumar.
Mariana: Acho que é 5^2, ele não é trinômio quadrado perfeito tem que completar [...] dá pra simplificar por 4 [...] ficou $x^2 +5x + 25$, daí dá.

Verificamos que, ao utilizarem a regra para fatoração, elas perceberam que a equação não representava um trinômio quadrado perfeito, no entanto, após simplificarem por 4, não voltaram a verificar a nova equação e cometeram o erro ao fatorar.

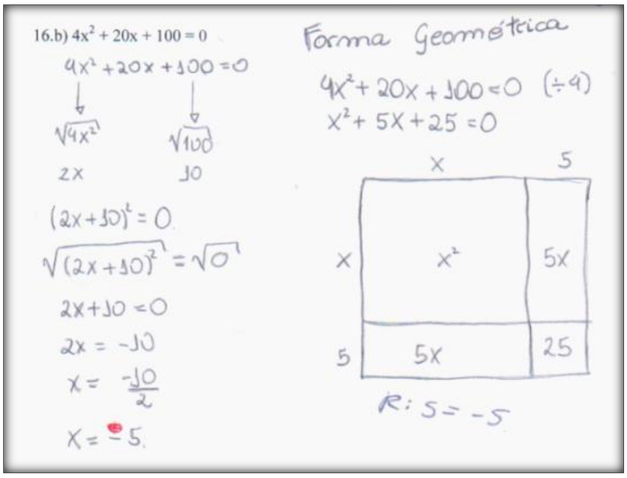


Protocolo 26: Atividade desenvolvida pelas alunas Karol e Mariana

Ao analisarmos a resolução da equação do item 16.b, pensamos que a equação pode ter induzido ao erro, pois era possível fatorar corretamente os termos a^2 e b^2 do trinômio, no caso, x^2 e 25, levando as alunas a acreditarem que a equação representava um trinômio quadrado perfeito. Contudo, em outras atividades (16.a,16.d,16.e), as equipes se mostraram capazes de fatorar corretamente.

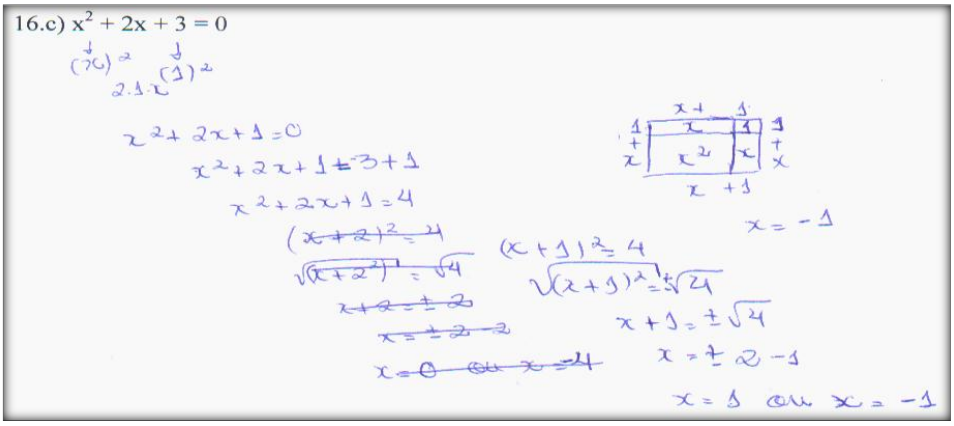
As equipes cometeram erros semelhantes, ao resolverem a equação: ao fatorar resolvendo algebricamente e ao representar geometricamente. Quanto ao erro na conversão ara o registro geométrico, as alunas ao representarem 5x nos retângulos deveriam, escrever 5x/2 ou 2,5x para cada um, o que não ocorreu. Assim, obtiveram a mesma resposta para a solução nas duas representações, levando-as a acreditar que a resolução estava correta.

A equipe formada pelos alunos Will, Rafaela e Vinícius, ao representar a resolução geométrica, verificamos que não possuíam modelo de representação geométrica para $4x^2$, exigindo outra estratégia de resolução, assim eles optaram por simplificar a equação por 4, o que não foi necessário no tratamento algébrico, pois podiam fatorar com facilidade.



Protocolo 27: Atividade desenvolvida pelos alunos Will, Rafaela e Vinícius

Na atividade 16.c, as alunas Karol e Mariana cometeram erro ao isolarem o termo c=3, que continuava com o mesmo sinal e também ao fatorarem a expressão $x^2 + 2x + 1$, obtendo $(x+2)^2$. Observamos durante a fala das alunas, constatações como "*Lembra o 3 não tá aqui, você colocou ele do outro lado*"; a ideia expressa foi a de transpor um termo para o outro lado da igualdade, e não o uso do princípio de equivalência. Alonso *et al* (1993) destacam esta dificuldade no conceito do símbolo igual, que numa equação não tem caráter unidirecional, representa equilíbrio, e os alunos muitas vezes custam em perceber isto. Ainda nesta atividade, as alunas, ao perceberem os erros procuram corrigi-los, mas desta vez, fatorando corretamente. No entanto, persistiram no erro ao transpor o termo c.

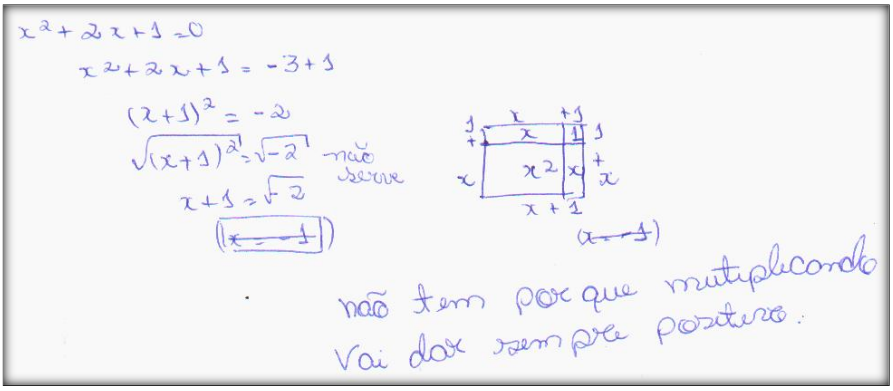


Protocolo 28: Atividade desenvolvida pelas alunas Karol e Mariana

Elas resolveram a equação proposta, incorretamente, fazendo uso do registro algébrico e obtiveram como resposta x = 1 e x = -1. Ao procederem à resolução geométrica de maneira incorreta, obtiveram como resposta somente x = -1.

Mariana: Esse não é tão difícil.
Karol: Aqui vai ser x, aqui +1.
Mariana: Aqui tem que ser 1, porque 1vezes1 é 1 e aqui 1x + 1x é 2x, x+1 tem que dar zero, então x é -1.
*Karol: Mariana tem coisa errada, aqui deu -1 e 1 (*na resolução algébrica*) e aqui só da -1 (*na resolução geométrica).
Mariana: -1+1 dá zero, -1 +1 dá zero.
Karol: Porque será que agente fez errado aqui?
*Mariana: Professora quando a gente fez aqui (*resolução geométrica*) descobrimos que aqui (*resolução algébrica) *tá tudo errado.*

Contudo, foi percebido pelas alunas que, independente da representação utilizada, deviam obter a mesma resposta, o que não aconteceu e, assim, ao procurar os erros, descobriram erros diversos e iniciaram uma nova resolução. O primeiro que encontraram foi com relação ao termo c=3 que, ao transpor, deveria ser -3. Mariana questionou "*mas então porque aqui deu certo?* Desse modo, a aluna acreditou que a resolução correta era a obtida por meio da representação geométrica.



Protocolo 29: Atividade 16.c desenvolvida pelas alunas Karol e Mariana

Apresentamos um fragmento da discussão acerca dos erros e da solução encontrada pelas alunas.

Karol: Vai dar errado Mariana, deu raiz de -2, não tem, e agora?
Mariana: A*í não vai ter, aí vai ficar -1.*
Karol: Agora deu certo.
P: Raiz de -2 não tem, não serve, e esse menos -1 de onde apareceu?
Karol: Do x que passou pra lá.
Mariana: Então aqui fica raiz de -2 -1.
Karol: Aí escreve que não serve, não convém.
P:Então se aqui na resolução algébrica não tem resposta, na representação geométrica como fica?
Karol: Também não tem resposta?
Mariana: *Iiii, tudo errado.*

Na primeira frase do excerto ficou evidente a dificuldade devido à natureza da resposta, destacada por (BOOTH, 1995) como a dificuldade em representá-la e a compreensão do seu significado. Em seguida, verificou-se o nosso encaminhamento, com o fim de mantê-las em situações adidáticas, para que as alunas pudessem compreender que as duas resoluções estavam erradas, determinar os erros, buscar a forma correta e chegar a uma resposta satisfatória, conforme visto no protocolo apresentado.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em nossa pesquisa trabalhamos com a equação do 2º grau, com o propósito de possibilitar aos alunos momentos de investigação e reflexão, bem como de encontrar uma alternativa para resolução e apreensão das equações do 2º grau, pela fatoração, ao realizar tratamentos e conversões em diferentes registros e pudessem validá-las. Nos momentos finais de cada atividade buscamos trabalhar a institucionalização de alguns conceitos, representações e técnicas referentes ao tema, com o fim de discutir e analisar erros, acertos, ideias equivocadas e estratégias de solução.

Nessa atividade destacamos erros relativos à fatoração, completamento do quadrado, ao transpor um termo de um membro a outro da igualdade, à resolução de raiz quadrada, também ao determinar o valor atribuído às medidas dos lados de cada retângulo na representação geométrica e à incompreensão da solução vazia e seu significado geométrico.

Conforme o exposto, verificamos que os registros numérico e algébrico foram utilizados com mais êxito que o registro geométrico. Foi possível perceber que as dificuldades manifestadas pelos alunos se devem, particularmente, ao fato do trinômio quadrado perfeito representar a área do quadrado e a forma fatorada evidenciar a medida dos lados das figuras que compõem o quadrado, bem como a soma dos termos $ax^2 + bx$ resultar na área dada pelo termo independente c. Os registros numérico e geométrico foram utilizados somente quando a atividade solicitava ou, eventualmente, como forma de validação da resposta encontrada pelo aluno. Constatamos que no tratamento algébrico houve erros provenientes da manipulação algébrica, que também foram destacados por Nguyen (2006). Durante as sessões, ficou evidente a dificuldade com a conversão do registro algébrico para o registro geométrico. Ainda nesse campo os alunos enfrentaram maior dificuldade em relação ao quadrado da diferença de dois termos.

Contudo, verificamos que os alunos pouco se envolveram na busca de validação da atividade. Sendo assim, trata-se de um aspecto a ser mais enfatizado e desenvolvido por professores, a fim de possibilitar mais autonomia do aluno frente a uma solução.

Com base nas produções apresentadas pelos alunos foi possível concluir que eles mobilizaram os registros algébrico e geométrico para a resolução de uma equação do 2º grau, realizando tratamentos adequados para a obtenção das raízes da equação. No entanto, dificuldades com tratamentos algébricos, em particular com a fatoração, impediram que alguns alunos resolvessem corretamente, mas não impediram a ascensão no nível de mobilização de registros.

REFERÊNCIAS

ALONSO, F. *et al*. **Ideas y Actividades para Enseñar Algebra**. Madrid: Sintesis, 1993. p. 201.

ARTIGUE, M. Ingenieria Didáctica. In. ARTIGUE, M. et al. **Ingenieria Didáctica em Educação Matemática:** Um esquema para La invetigación y La innovación em La enseñanza y El aprendizage de las matemáticas. Iberoamérica: México, 1995, 129 p.

BOOTH, L. R. **Dificuldades das Crianças que se Iniciam Em Álgebra.** In: COXFORD, A., SHULTE, A. As idéias da álgebra. Tradução de Hygino H. Domingues. 4. ed. São Paulo: Atual, 1995. P. 23-36.

BROUSSEAU, G. **Fondements et methods de la didactique des Mathématiques**. Recherches en Didactique de Mathématiques, v. 7, n. 2, 1986, p. 33 –115.

DAMM, R. F. **Registros de Representação**. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org). Educação Matemática: Uma (nova) introdução. São Paulo: EDUC, 2010. p. 167-188.

DUVAL, R. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática**. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org). Aprendizagem em Matemática: Registros de representação semiótica. Campinas, SP: Papirus, 2003. p. 11-33.

FREITAS, J. L. M. **Teoria das Situações Didáticas**. In: MACHADO, S. D. A. (Org). Educação Matemática: Uma (nova) introdução. 3. Ed. São Paulo: EDUC, 2010. p. 77-112.

NGUYEN, A. Q. **Les apports d'une analyse didactique comparative de la résolution des équations du second degré dans l'enseignement secondaire au Vietnam et en France.** 2006. 344 p. Thèse d'université. Université Joseph Fourier Grenoble, França.