A MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO

Thiago Alves Spontoni
INMA/UFMS
spontoni@gmail.com

Elen Viviani Pereira Spreafico
INMA/UFMS
elenvps@gmail.com

Temática: Ensino e aprendizagem de Matemática

Resumo: Apresentamos o desenvolvimento das equações diferenciais lineares de primeira ordem, buscando mostrar aplicações práticas e aplicáveis no Ensino Médio, como a verificação do decrescimento ou crescimento da taxa de matrículas no Ensino Médio das escolas públicas de Rede Estadual de Mato Grosso do Sul - MS.

Palavras-chave: Equações Diferenciais; Interpolação de Lagrange; Taxa de Matrícula.

Introdução

Este material foi desenvolvido para servir como suporte a professores e alunos que pretendam aplicar as Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem, bem como a Interpolação de Lagrange, em grupos de estudos matemáticos, formados por discentes da Educação Básica, visando um aprimoramento em alguns tópicos da modelagem matemática.

Motivados por problemas físicos, no final do século XVII, o estudo sobre as equações diferenciais ordinárias teve início com os matemáticos Isaac Newton (1642-1727) e Gettfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), os quais descobriram de forma independente, técnicas de derivação e integração e, que posteriormente seriam utilizadas para resolver problemas que envolvessem derivação, denominadas Equações Diferenciais. Eles procuravam expressar as soluções de forma explícita para tais problemas e que fossem obtidas de forma natural e razoável. Vários pesquisadores também desenvolveram outras teorias que contribuíram para o desenvolvimento e aplicações práticas das equações diferenciais, ajudando desta maneira, para os avanços na matemática e também nas ciências físicas (BOYER).

Uma visão histórica das equações diferenciais, onde a mesma iniciou-se com o estudo de cálculo durante o século XVII, pelos matemáticos Isaac Newton (1642 - 1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) é relatada por Boyce (BOYCE).

Segundo Bassanezi “a modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real”. Dessa forma, a arte de modelar faz com que a Matemática se aproxime da realidade e não o caminho inverso.

Apresentando diferentes aplicações em ramos distintos, como na Engenharia, Biologia e até na Psicologia e contendo características puramente matemáticas, as Equações Diferenciais são utilizadas comumente para descrever modelos de comportamentos de algum sistema ou fenômeno a ser estudado, através de termos matemáticos (STEWART).

Conhecimentos em técnicas e resultados da análise matemática de sequências de funções são necessários para estudar a existência de soluções nas equações diferenciais lineares de primeira ordem. No século XVII, muitos problemas puderam ser modelados de forma matemática na forma de equações diferenciais, porém percebeu-se com o passar do tempo que não seria possível obter um procedimento geral para a obtenção da resolução de uma equação diferencial, dando início à procura de outros métodos de estudo que não fosse a solução explícita (STEWART).

Caso esta função desconhecida seja uma função real de uma variável também real, as equações diferenciais são chamadas de equações diferenciais ordinárias (EDO's), as quais serão um dos objetos deste estudo. Também existem as equações diferenciais parciais (EDP’s), porém as mesmas não serão abordadas neste trabalho (BOYCE).

Através do desenvolvimento do cálculo e explicações dos princípios básicos da mecânica Newton forneceu a base para a aplicação das equações diferenciais no século XVIII. Por outro lado, Leibniz estudava as variáveis x e y variando sobre sequências de valores infinitamente próximos, introduzindo a notação δx e δy como as diferenças entre os valores sucessivos dessas sequências (STEWART).

Foi identificado por Euler uma condição para que equações diferenciais de primeira ordem fossem exatas, método que tratava da variação de parâmetros. Desta maneira, foi possível estender esses resultados para equações não homogêneas. Um teorema de existência para as soluções das equações diferenciais de primeira ordem foi desenvolvido por Rudolf Lipschitz (1832 - 1903) (STEWART).

Podemos identificar uma grande quantidade de situações nas quais é necessário determinar uma quantidade variável a partir de um coeficiente. Por exemplo, no caso de uma colônia de bactérias, conhecer o seu número após um certo intervalo de tempo, sabendo a quantidade inicial e a velocidade de crescimento; no caso de uma substância radioativa que se desintegra, com coeficiente de variação conhecido, determinar a quantidade de substância remanescente depois de um dado tempo, conhecida a quantidade inicial e, neste trabalho, conhecer a taxa de crescimento ou decrescimento das matrículas na Educação Básica nas escolas públicas estaduais de Mato Grosso do Sul – MS.

Procuramos, em todos os casos citados como exemplos, encontrar uma função desconhecida por meio de uma equação que envolva pelo menos uma derivada da função a ser determinada. Esta equação tem o nome de equação diferencial.

Tivemos como motivação a curiosidade pelas aplicações das equações diferenciais e a pretensão de apresentar um tema que geralmente não é abordado em cursos tradicionais de Licenciatura em Matemática. Devido à grande importância desse assunto na ciência e tecnologia atual, iremos apresentar alguns teoremas de grande importância e algumas de suas aplicações. Enfatizamos que o desenvolvimento das soluções de determinadas equações diferenciais ainda continua como objeto de pesquisa, com problemas atrativos e importantes ainda não resolvidos.

Verificamos que as equações diferenciais possuem grande aplicabilidade nas diferentes áreas das engenharias, Química, Economia, porém nem sempre são percebidas em nosso dia a dia. Elas são uma poderosa ferramenta pelos seus diversos modos de aplicação, auxiliando em atividades simples e complexas (STEWART).

Procuramos com este trabalho apresentar o desenvolvimento das equações diferenciais ao longo dos tempos, assim como sua aplicabilidade, buscando mostrar aplicações práticas e aplicáveis ao Ensino Médio, como a verificação do decrescimento ou crescimento da taxa de matrículas no Ensino Médio das escolas públicas de Rede Estadual de Mato Grosso do Sul - MS.

Definição de EDO

Se a função desconhecida depende de uma única variável independente, temos uma Equação Diferencial Ordinária (EDO). Estas equações possuem apenas derivadas em relação a uma única variável, em outras palavras, é uma relação entre uma função de uma variável real e a derivada desta função em relação a uma incógnita (STEWART).

Desta maneira, verifica-se que existe uma igualdade entre uma variável independente, x, e uma variável dependente, y, e algumas das suas derivadas, y', y'', ... , y^n (STEWART).

O Modelo de Malthus

O modelo de crescimento populacional mais conhecido é do economista inglês Thomas Malthus, apresentado em 1798. O modelo malthusiano pressupõe que a taxa segundo a qual a população de um país cresce em um determinado instante é proporcional à população total do país naquele instante. Matematicamente, se P(t) é a população total no instante t, então, o modelo contínuo de Malthus é dP/dt = K.P, onde k é uma constante de proporcionalidade (nesse caso k > 0). Esse modelo é utilizado no crescimento de pequenas populações em um curto intervalo de tempo (STEWART).

Sabendo que uma certa população cresce segundo o modelo malthusiano e $P(0) = P_0$, então:

$$P=P_0.e^{kt}.$$

Para contextualizar a aplicação das equações diferenciais, foi feito um levantamento da taxa de matrículas no Ensino Médio das escolas da Rede Estadual de Ensino de Mato Grosso do Sul, durante 6 anos (2010-2015) e a estes valores foi aplicado o Modelo de Malthus (SED/MS).

Interpolação Polinomial: Os Polinômios de Lagrange

Interpolar uma função f(x) consiste em aproximar essa função por uma outra função g(x), escolhida entre uma classe de funções definida a priori e que satisfaça algumas propriedades. A função g(x) é então usada em substituição à função f(x) (BASSANEZI).

Aplicando o Método da Interpolação de Lagrange, podemos encontrar $p_n(x)$, com n igual ao grau máximo do polinômio que melhor se ajusta aos parâmetros pesquisados.

Dados e resultados obtidos

Tabela 1: Número de matrículas da Rede Estadual de Ensino de Mato Grosso do Sul – MS entre os anos de 2010 e 2016 (SED/MS).

Ano	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Número de Matrículas	281.939	279.496	267.606	258.111	252.352	246.302	257.923

Utilizando a Interpolação de Lagrange e efetuando os devidos cálculos, chegamos ao seguinte polinômio interpolador:

$$p_6(x) = 30,88x^6 - 420,54x^5 + 1761,10x^4 - 859,50x^3 - 9121,58x^2 + 6168,84x + 281939$$

Considerações Finais

Apresentando uma abordagem didática e prática das equações diferenciais foram propostas algumas aplicações do conteúdo abordado, bem como uma comparação entre dois métodos distintos. Aliado a modelagem matemática, o conceito de Polinômio de Lagrange, que é de entendimento simples, juntamente com as Equações Diferenciais, podem ser utilizados também para contribuir nas diversas áreas de conhecimento.

Os professores precisam estar aptos a repensar a organização disciplinar e dos anos escolares, no sentido de abrir possibilidades para que os educandos realizem percursos formativos mais diversificados, mais apropriados às suas condições de vida. Contudo vemos a defasagem pela variedade de idade dos alunos, pela falta de preparo dos professores ou dos métodos adotados pelo currículo escolar, uma vez que a escola tem que ajustar o fazer pedagógico às necessidades dos alunos.

Sabendo disso, a pesquisa apresenta possibilidades de assegurar um ensino contextualizado e interdisciplinar que trate de questões sociais, buscando responder as necessidades do momento atual, proporcionado o desenvolvimento de conhecimentos mais amplos, que possibilitem uma visão de mundo crítica. Para um ensino contextualizado devemos entrar no universo cultural dos educandos valorizando o conhecimento e saberes construídos nas práticas de trabalho e convivência no meio popular. Essa referência curricular de temas geradores pertinentes à experiência sociocultural dos alunos e fortemente influenciadas pela proposta freireana e pela Abordagem Temática (DELIZOICOV).

Agradecimentos

A profª Dra. Elen Viviani Pereira Spreafico, que além de ser uma ótima professora, inspiradora deste trabalho, demonstrou muita paciência e amizade, ao me orientar e conduzir pelos corretos caminhos, para que este trabalho fosse concluído com sucesso.

Aos professores Dr. Claudemir, Dra. Rúbia, Dra. Elisabeth, Dr. Alex e Dr. Edson pelas opiniões de fundamental importância para a realização deste trabalho e por terem repartido seus conhecimentos.

Agradeço à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pela concessão da bolsa durante todo o período de realização deste mestrado e também à Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS por me acolher como aluno desde o período da graduação.

A todos que direta ou indiretamente apoiaram a realização deste trabalho.

Referências

ANGOTTI, J. A.; PERNAMBUCO, M.M. *Ensino de Ciências: fundamentos e métodos.* São Paulo: Cortez, 2002.

BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia.* São Paulo: Contexto, 2002.

BOYCE, Willian E; DIPRIMA, Richard C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno.* Tradução: Valéria de Magalhães Iorio. 8ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

BOYER, Carl B. *História da Matemática.* Tradução: Elza F. Gomide. 2ª ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

BRASIL. *Censo Escolar da Educação Básica 2016.* Notas Estatísticas, Brasília-DF, fevereiro de 2017.

BRASIL. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Lei n. 9394 de 20 de dezembro de 1996. *PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS:* Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRONSON, Richard. Moderna Introdução as Equações Diferenciais, 3ª ed. 1977.

CENSO ESCOLAR DA EDUCAÇÃO BÁSICA 2016 - Notas Estatísticas, Brasília-DF, fevereiro de 2017.

DELIZOICOV, D. (1980). **Rapport sur le projet de formation des professeurs de sciences naturelles en Guiné Bissau**: Bilan 1979-1980. Paris: IRFED, 1980.

DIAGNÓSTICO SOCIOECONÔMICO DE MATO GROSSO DO SUL - MS, 2015.

HENRIQUES, Abel. Thomas Robert Malthus: **A Teoria Malthusiana.** Coimbra, Portugal. Instituto Politécnico de Coimbra, 2007. Disponível em http://www.miniweb.com.br/Ciencias/artigos/malthus.html, acessado em 20 de janeiro 2018.

SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO. Disponível em: www.sed.ms.gov.br/censo-escolar-6/. Acesso em 15 de janeiro de 2018.

SEMADE - Secretaria de Estado de Meio Ambiente e Desenvolvimento Econômico. **DIAGNÓSTICO SOCIOECONÔMICO DE MATO GROSSO DO SUL - 2015.**

STEWART, James. **Cálculo.** Tradução: Antônio Carlos Moretti; Antônio Carlos Gilli Martins. Vol. II, 5ª ed. São Paulo: Thomson Learning, 2007.

ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. **Equações Diferenciais.** Volume 01. 3ª Edição. Pearson Education, 2001.