

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA  
EM REDE NACIONAL - PROFMAT

THIAGO ALVES SPONTONI

MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO: EQUAÇÕES  
DIFERENCIAIS DE 1ª ORDEM E INTERPOLAÇÃO DE LAGRANGE

CAMPO GRANDE - MS

2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA  
EM REDE NACIONAL - PROFMAT

THIAGO ALVES SPONTONI

MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO: EQUAÇÕES  
DIFERENCIAIS DE 1ª ORDEM E INTERPOLAÇÃO DE LAGRANGE

Orientadora: Prof. Dra. Elen Viviani Pereira Spreafico

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul-INMA/UFMS como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Campo Grande - MS

2018

# MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO: EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE 1ª ORDEM E INTERPOLAÇÃO DE LAGRANGE

THIAGO ALVES SPONTONI

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - INMA/UFMS como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Aprovado pela Banca Examinadora:

Prof. Dra. Elen Viviani Pereira Spreafico - UFMS

Prof. Dr. Félix Silva Costa - UEMA

Prof. Dr. Edson Rodrigues Carvalho - UFMS

Campo Grande - MS, Maio de 2018

# Agradecimentos

Agradeço a Deus pela vida, pelo grande amor que tem por mim e por colocar as pessoas certas em meu caminho.

A prof<sup>a</sup> Dra. Elen Viviani Pereira Spreafico, que além de ser uma ótima professora, inspiradora deste trabalho, demonstrou muita paciência e amizade, ao me orientar e conduzir pelos corretos caminhos, para que este trabalho fosse concluído com sucesso.

Aos professores Dr. Claudemir, Dra. Rúbia, Dra. Elisabeth, Dr. Alex e Dr. Edson pelas opiniões de fundamental importância para a realização deste trabalho e por terem repartido seus conhecimentos.

Aos discentes do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Maiara, Eder, Estevão, André, Willian e Clayton, os quais além de alunos, foram companheiros e amigos nessa longa caminhada e sem os quais este trabalho não teria sido realizado.

Aos meus pais, Antonio Claudio e Celina, minha irmã Emory, minha amada esposa Charlene e ao fruto de nosso amor, a pequena Ana Yara, os quais ajudaram com muitos conselhos, paciência e carinho.

Agradeço à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pela concessão da bolsa durante todo o período de realização deste mestrado e também à Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS por me acolher como aluno desde o período da graduação.

A todos que direta ou indiretamente apoiaram a realização deste trabalho.

*”Só existe língua se houver seres humanos que a falem.”*

*Marcos Bagno*

# Resumo

Apresentamos o desenvolvimento das equações diferenciais lineares de primeira ordem, buscando mostrar aplicações práticas e aplicáveis no Ensino Médio, como a verificação do decréscimo ou crescimento da taxa de matrículas no Ensino Médio das escolas públicas de Rede Estadual de Mato Grosso do Sul - MS.

**Palavras-chave:** Equações Diferenciais, Interpolação de Lagrange, Taxa de Matrícula.

# Abstract

We present the development of the first order linear differential equations, seeking to show practical and applicable applications in High School, such as the verification of the decrease or growth of the enrollment rate in High School in the State schools of Mato Grosso do Sul - MS.

**Keywords:** Differential Equations, Lagrange Interpolation, Enrollment Rate.

# Índice

<b>1</b>	<b>Equações Diferenciais</b>	<b>13</b>
1.1	Definição de Equações Diferenciais . . . . .	13
1.2	A Ordem e o Grau de uma Equação Diferencial . . . . .	13
1.3	Teorema de Existência e Unicidade . . . . .	14
1.4	Solução de EDO's de 1ª Ordem . . . . .	18
1.4.1	EDO's Lineares de 1ª Ordem . . . . .	18
1.4.2	Método do Fator Integrante . . . . .	19
1.4.3	Equações Separáveis . . . . .	20
1.4.4	Equações Exatas . . . . .	21
1.4.5	Equações Não Exatas . . . . .	22
<b>2</b>	<b>Aplicações das Equações Diferenciais de 1ª ordem</b>	<b>23</b>
2.1	Variação de Temperatura . . . . .	24
2.2	Juros Compostos . . . . .	26
2.3	Propagação da Podridão em Maçãs . . . . .	27
2.4	Circuito Elétrico . . . . .	29
2.5	Modelo de Malthus (Crescimento/Decrescimento Populacional) . . . . .	31
<b>3</b>	<b>Aplicação do Modelo de Malthus através de dados reais</b>	<b>33</b>
3.1	Aplicação 1: Estimativa das Matrículas no Ensino Médio no estado de Mato Grosso do Sul - MS através do Modelo de Malthus . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Interpolação Polinomial: Os Polinômios de Lagrange</b>	<b>38</b>
4.1	Forma de Lagrange para o Polinômio de Interpolação . . . . .	39
4.2	Aplicação 2: Estimativa das Matrículas no Ensino Médio no estado de Mato Grosso do Sul - MS através da Interpolação de Lagrange . . . . .	41





# Lista de Figuras

3.1	Gráfico da evolução de matrículas no Ensino Médio de 2010 à 2015 da Rede Estadual de Mato Grosso do Sul - MS. . . . .	34
4.1	Esboço de uma função interpolante $P_n(x)$ . . . . .	38
4.2	Gráfico da evolução de matrículas no Ensino Médio de 2010 à 2016 da Rede Estadual de Mato Grosso do Sul - MS. . . . .	41

# Lista de Tabelas

3.1	Número de matrículas no Ensino Médio da Rede Estadual de Mato Grosso do Sul - MS . . . . .	33
4.1	Número de matrículas no Ensino Médio da Rede Estadual de Mato Grosso do Sul - MS considerando os valores até o ano de 2016. . . . .	41
5.1	Taxa de Fecundidade por Mulher em Período Fértil no estado de Mato Grosso do Sul - MS entre os anos de 1980 e 2016. . . . .	50
5.2	Taxa de Matrículas na Rede Privada de Ensino do Estado de Mato Grosso do Sul - MS entre os anos de 2010 e 2014. . . . .	50

# Introdução

Este material foi desenvolvido para servir como suporte a professores e alunos que pretendam aplicar as Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem, bem como a Interpolação de Langrange, em grupos de estudos matemáticos, formados por discentes da Educação Básica, visando um aprimoramento em alguns tópicos da modelagem matemática.

Motivados por problemas físicos, no final do século XVII, o estudo sobre as equações diferenciais ordinárias teve início com os matemáticos Isaac Newton (1642-1727) e Gettfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), os quais descobriram de forma independente, técnicas de derivação e integração e, que posteriormente seriam utilizadas para resolver problemas que envolvessem derivação, denominadas Equações Diferenciais. Eles procuravam expressar as soluções de forma explícita para tais problemas e que fossem obtidas de forma natural e razoável. Vários pesquisadores também desenvolveram outras teorias que contribuíram para o desenvolvimento e aplicações práticas das equações diferenciais, ajudando desta maneira, para os avanços na matemática e também nas ciências físicas [4].

Uma visão histórica das equações diferenciais, onde a mesma iniciou-se com o estudo de cálculo durante o século XVII, pelos matemáticos Isaac Newton (1642 - 1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) é relatada por Boyce [3].

Segundo Bassanezi [2] “a modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real.” Dessa forma, a arte de modelar faz com que a Matemática aproxime-se da realidade e não o caminho inverso.

Apresentando diferentes aplicações em ramos distintos, como na Engenharia, Biologia e até na Psicologia e contendo características puramente matemáticas, as Equações Diferenciais são utilizadas comumente para descrever modelos de comportamentos de algum sistema ou fenômeno a ser estudado, através de termos matemáticos [17].

Conhecimentos em técnicas e resultados da análise matemática de sequências de funções são

necessários para estudar a existência de soluções nas equações diferenciais lineares de primeira ordem. No século XVII, muitos problemas puderam ser modelados de forma matemática na forma de equações diferenciais, porém percebeu-se com o passar do tempo que não seria possível obter um procedimento geral para a obtenção da resolução de uma equação diferencial, dando início à procura de outros métodos de estudo que não fosse a solução explícita.

Caso esta função desconhecida seja uma função real de uma variável também real, as equações diferenciais são chamadas de equações diferenciais ordinárias (EDO's), as quais serão um dos objetos deste estudo. Também existem as equações diferenciais parciais (EDP's), porém as mesmas não serão abordadas neste trabalho [3].

Através do desenvolvimento do cálculo e explicações dos princípios básicos da mecânica Newton forneceu a base para a aplicação das equações diferenciais no século XVIII. Por outro lado, Leibniz estudava as variáveis  $x$  e  $y$  variando sobre sequências de valores infinitamente próximos, introduzindo a notação  $\Delta x$  e  $\Delta y$  como as diferenças entre os valores sucessivos dessas sequências [16].

Foi identificado por Euler uma condição para que equações diferenciais de primeira ordem fossem exatas, método que tratava da variação de parâmetros. Desta maneira, foi possível estender esses resultados para equações não homogêneas. Um teorema de existência para as soluções das equações diferenciais de primeira ordem foi desenvolvido por Rudolf Lipschitz (1832 - 1903) [16].

Podemos identificar uma grande quantidade de situações nas quais é necessário determinar uma quantidade variável a partir de um coeficiente. Por exemplo, no caso de uma colônia de bactérias, conhecer o seu número após um certo intervalo de tempo, sabendo a quantidade inicial e a velocidade de crescimento; no caso de uma substância radioativa que se desintegra, com coeficiente de variação conhecido, determinar a quantidade de substância remanescente depois de um dado tempo, conhecida a quantidade inicial e, neste trabalho, conhecer a taxa de crescimento ou decréscimo das matrículas na Educação Básica nas escolas públicas estaduais de Mato Grosso do Sul - MS.

Procuramos, em todos os casos citados como exemplos, encontrar uma função desconhecida por meio de uma equação que envolva pelo menos uma derivada da função a ser determinada. Esta equação tem o nome de equação diferencial.

Temos como motivação a curiosidade pelas aplicações das equações diferenciais e a pretensão de apresentar um tema que geralmente não é abordado em cursos tradicionais de Licenciatura

em Matemática. Devido à grande importância desse assunto na ciência e tecnologia atual, iremos apresentar alguns teoremas de grande importância e algumas de suas aplicações. Enfatizamos que o desenvolvimento das soluções de determinadas equações diferenciais ainda continua como objeto de pesquisa, com problemas atrativos e importantes ainda não resolvidos.

Verificamos que as equações diferenciais possuem grande aplicabilidade nas diferentes áreas das engenharias, Química, Economia, porém nem sempre são percebidas em nosso dia a dia. Elas são uma poderosa ferramenta pelos seus diversos modos de aplicação, auxiliando em atividades simples e complexas [16].

Procuramos com este trabalho apresentar o desenvolvimento das equações diferenciais ao longo dos tempos, assim como sua aplicabilidade, buscando mostrar aplicações práticas e aplicáveis ao Ensino Médio, como a verificação do decréscimo ou crescimento da taxa de matrículas no Ensino Médio das escolas públicas de Rede Estadual de Mato Grosso do Sul - MS.

No primeiro capítulo será abordada a definição de Equação Diferencial, bem como seu grau e ordem. Além disso será exposto que uma EDO possui solução e a mesma é única (Teorema da Existência e Unicidade).

Serão abordados no capítulo 2 problemas que envolvem EDO's de primeira ordem, juntamente com alguns métodos de resolução. O modelo de Malthus, o qual será utilizado neste trabalho, também será apresentado, assim como aplicações práticas das Equações Diferenciais de 1ª Ordem, que podem ser trabalhadas no Ensino Médio.

No 3º capítulo, através de dados reais coletados durante esta pesquisa, utilizaremos o Modelo de Malthus para calcular uma estimativa da Taxa de Matrículas no Ensino Médio no estado de Mato Grosso do Sul - MS.

O 4º capítulo destinamos para a apresentação da Interpolação Polinomial: Os Polinômios de Lagrange, buscando definir um polinômio que melhor se ajusta a um grupo definido de dados.

Relatamos, ao longo dos capítulos, a evolução dos estudos sobre o tema proposto, bem como a resolução de alguns problemas utilizando as equações diferenciais lineares de primeira ordem e uma aplicação mais particular, verificando as taxas de matrículas no Ensino Médio das escolas públicas estaduais de Mato Grosso do Sul – MS.

# Capítulo 1

## Equações Diferenciais

Neste capítulo serão abordadas mais precisamente as Equações Diferenciais Ordinárias, as quais apresentam derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma única variável independente. Utilizamos como texto base para as demonstrações deste capítulo o livro Cálculo, vol. II, 5ª edição, 2007, editora São Paulo, do autor James Stewart.

### 1.1 Definição de Equações Diferenciais

**Definição 1.** *A relação das derivadas, de uma função desconhecida, estabelecida entre os valores de uma variável dependente, com uma variável independente, é chamada de Equação Diferencial.*

Se a função desconhecida depende de uma única variável independente, temos uma Equação Diferencial Ordinária (EDO). Estas equações possuem apenas derivadas em relação a uma única variável, em outras palavras, é uma relação entre uma função de uma variável real e a derivada desta função em relação a uma incógnita. Desta maneira, verifica-se que existe uma igualdade entre uma variável independente,  $x$ , e uma variável dependente,  $y$ , e algumas das suas derivadas,  $y', y'', \dots, y^{(n)}$ .

### 1.2 A Ordem e o Grau de uma Equação Diferencial

**Definição 2.** *Chamamos de ordem de uma equação a derivada mais alta que aparece numa equação diferencial, enquanto a potência que está elevada à derivada que define a ordem da equação é conhecida como grau. Uma equação que envolve derivadas até ordem  $n$ , é chamada*

de equação diferencial ordinária (EDO) de ordem  $n$  e pode ser escrita na forma:

$$F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1.1)$$

sendo  $F$  uma função de  $t, y$  e suas derivadas  $y', y'', \dots, y^{(n)}$ .

Veja alguns exemplos:

**Exemplo 1.** Seja  $P(t)$  a densidade (ou número de indivíduos) da população de uma certa espécie no instante de tempo  $t$ . Podemos assumir que a taxa de crescimento da população é proporcional a sua densidade. Em termos matemáticos,

$$\frac{dP}{dt} = \lambda P. \quad (1.2)$$

Aqui,  $\lambda$  representa a taxa de crescimento (se  $\lambda > 0$ ) ou decrescimento (se  $\lambda < 0$ ).

A equação 1.2 é chamada **equação diferencial ordinária de primeira ordem** porque envolve apenas a primeira derivada de uma função  $P$  que depende de uma única variável  $t$ .

**Exemplo 2.** A Lei de Newton afirma que  $F = ma$ . Se  $x(t)$  representa a posição de uma partícula no instante  $t$ , então podemos escrever:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right), \quad (1.3)$$

em que a força resultante pode depender do tempo  $t$ , da posição  $x$  e da velocidade da partícula  $\frac{dx}{dt}$ .

No Exemplo 1.3, temos uma equação que envolve a segunda derivada de uma função  $x$  em  $t$ . Dessa forma, ela é chamada **equação diferencial ordinária de segunda ordem**.

## 1.3 Teorema de Existência e Unicidade

**Teorema 1.** *Existência e Unicidade [3]. Considere o problema de valor inicial:*

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad , \quad y(t_0) = y_0$$



Se  $f(t, y)$  e  $\frac{df}{dy}$  são contínuas no retângulo  $R = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha < t < \beta, \delta < y < \gamma\}$ , contendo  $(t_0, y_0)$ , então o problema proposto tem uma única solução em um intervalo contendo  $t_0$ .

**Demonstração. Existência:**

Defina a sequência de funções  $y_n(t)$  por:

$$y_0(t) = y_0, \quad y_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_{n-1}(s)) ds, \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots$$

Como  $f(t, y)$  é contínua no retângulo  $R$ , existe uma constante positiva  $b$  tal que,

$$|f(t, y)| \leq b, \quad \text{para } (t, y) \in R.$$

Assim,

$$|y_1(t) - y_0| \leq b|t - t_0|, \quad \text{para } \alpha < t < \beta.$$

Como  $\frac{df}{dy}$  é contínua no retângulo  $R$ , existe uma constante positiva  $a$  tal que

$$|f(t, y) - f(t, z)| \leq a|y - z|, \quad \text{para } \alpha < t < \beta \text{ e } \delta < y, z < \gamma.$$

Assim

$$|y_2(t) - y_1(t)| \leq \int_{t_0}^t |f(s, y_1(s)) - f(s, y_0(s))| ds \leq a \int_{t_0}^t |y_1(s) - y_0| ds \leq ab \int_{t_0}^t |s - t_0| ds = ab \frac{|t - t_0|^2}{2}$$

e

$$|y_3(t) - y_2(t)| \leq \int_{t_0}^t |f(s, y_2(s)) - f(s, y_1(s))| ds \leq a \int_{t_0}^t |y_2(s) - y_1(s)| ds \leq a^2 b \int_{t_0}^t \frac{|s - t_0|^2}{2} ds = a^2 b \frac{|t - t_0|^3}{6}.$$

Vamos supor, por indução, que

$$|y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t)| \leq a^{n-2} b \frac{|t - t_0|^{n-1}}{(n-1)!}, \quad \text{para algum } n \in \mathbb{N}.$$

Então,

$$\begin{aligned}
|y_n(t) - y_{n-1}(t)| &\leq \int_{t_0}^t |f(s, y_{n-1}(s)) - f(s, y_{n-2}(s))| ds \leq a \int_{t_0}^t |y_{n-1}(s) - y_{n-2}(s)| ds \\
&\leq a \int_{t_0}^t a^{n-2} b \frac{|s - t_0|^{n-1}}{(n-1)!} ds = a^{n-1} b \frac{|t - t_0|^n}{n!}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Estas desigualdades são válidas para  $\alpha \leq \alpha' < t < \beta' \leq \beta$  em que  $\alpha'$  e  $\beta'$  são tais que  $\delta < y_n(t) < \gamma$  sempre que  $\alpha' < t < \beta'$ .

Segue de 1.4,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |y_n(t) - y_{n-1}(t)| \leq b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1} (\beta - \alpha)^n}{n!},$$

que é convergente.

Como  $y_n(t) = y_0 + \sum_{k=1}^n (y_k(t) - y_{k-1}(t))$ , então  $y_n(t)$  é convergente.

Seja  $y(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(t)$ .

Sabendo que  $|y_m(t) - y_n(t)| \leq \sum_{k=n+1}^m |y_k(t) - y_{k-1}(t)| \leq b \sum_{k=n+1}^m \frac{a^{k-1} (\beta - \alpha)^k}{k!}$  e passando ao limite quando  $m$  tende ao infinito, obtemos que:

$$|y(t) - y_n(t)| \leq b \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a^{k-1} (\beta - \alpha)^k}{k!}. \tag{1.5}$$

Logo dado um  $\varepsilon > 0$ , para  $n$  suficientemente grande,  $|y(t) - y_n(t)| < \varepsilon/3$ , para  $\alpha' < t < \beta'$ .

Daí, segue-se que  $y(t)$  é contínua, pois dado um  $\varepsilon > 0$ , para  $s$  suficientemente próximo de  $t$ , temos que  $|y_n(t) - y_n(s)| < \varepsilon/3$  e para  $n$  suficientemente grande  $|y(t) - y_n(t)| < \varepsilon/3$  e  $|y(s) - y_n(s)| < \varepsilon/3$ , o que implica que:

$$|y(t) - y(s)| \leq |y(t) - y_n(t)| + |y_n(t) - y_n(s)| + |y_n(s) - y(s)| < \varepsilon.$$

Além disso, para  $\alpha' < t < \beta'$ , temos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t f(s, y_n(s)) ds = \int_{t_0}^t f(s, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(s)) ds = \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds,$$

pois, por 1.5, tem-se que

$$\left| \int_{t_0}^t f(s, y_n(s)) ds - \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds \right| \leq \int_{t_0}^t |f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))| ds$$

$$\leq a \int_{t_0}^t |y_n(s) - y(s)| ds \leq ab(t - t_0) \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a^{k-1}(\beta - \alpha)^k}{k!},$$

que tende a zero quando  $n$  tende a infinito. Portanto,

$$\begin{aligned} y(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(t) = y_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t f(s, y_{n-1}(s)) ds = \\ &= y_0 + \int_{t_0}^t f(s, \lim_{n \rightarrow \infty} y_{n-1}(s)) ds = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds. \end{aligned}$$

Derivando em relação a  $t$  esta equação vemos que  $y(t)$  é solução do problema de valor inicial. □

**Demonstração. Unicidade:**

Vamos supor que  $y(t)$  e  $z(t)$  sejam soluções do problema de valor inicial. Seja

$$u(t) = \int_{t_0}^t |y(s) - z(s)| ds.$$

Assim, como:

$$y(t) = \int_{t_0}^t y'(s) ds = \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds, \quad z(t) = \int_{t_0}^t z'(s) ds = \int_{t_0}^t f(s, z(s)) ds,$$

então:

$$u'(t) = |y(t) - z(t)| \leq \int_{t_0}^t |y'(s) - z'(s)| ds = \int |f(s, y(s)) - f(s, z(s))| ds \leq a \int_{t_0}^t |y(s) - z(s)| ds$$

ou seja,

$$u'(t) \leq au(t).$$

Subtraindo  $au(t)$  e multiplicando-se por  $e^{-at}$ , obtemos:

$$\frac{d}{dt}(e^{-at}u(t)) \leq 0, \quad \text{com } u(t_0) = 0.$$

Isto implica que  $e^{-at}u(t) = 0$  (lembre-se que  $u(t) \geq 0$ ) e, portanto que  $u(t) = 0$ , para todo  $t$ .

Assim,  $y(t) = z(t)$ , para todo  $t$ . □

## 1.4 Solução de EDO's de 1ª Ordem

Apresentamos a seguir um esquema dos métodos de resoluções das EDOS's utilizadas neste trabalho.

- EDO's Lineares de 1ª Ordem  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Integração Direta} \\ \text{Homogêneas} \\ \text{Não Homogêneas} \end{array} \right.$
- Método do Fator Integrante
- Equações Separáveis
- Equações Exatas
- Equações Não Exatas

### 1.4.1 EDO's Lineares de 1ª Ordem

Dada a função da forma canônica (padrão),  $\frac{dy}{dt} = a(t)y + b(t)$ , não fatorável para  $y'$ , ou seja, não separável, existem os seguintes casos a serem analisados:

- Se  $a(t) = 0$ , a equação torna-se:

$$\frac{dy}{dt} = b(t),$$

e pode ser resolvida diretamente por integração.

- Se  $b(t) = 0$  a equação é considerada **homogênea** [3].

Note que uma EDO linear de 1º ordem homogênea é separável

$$\frac{dy}{dt} = a(t)y,$$

assim, basta utilizar o método das equações separáveis.

- Se  $b(t) \neq 0$  a equação é considerada **não-homogênea** [3].

$$\frac{dy}{dt} = a(t)y + b(t).$$

Para resolve-la vamos introduzir a seguir o Método do Fator Integrante.

### 1.4.2 Método do Fator Integrante

Uma função  $\mu(x, y)$  é um fator integrante de uma equação se:

$$\mu(x, y)[M(x, y)dx + N(x, y)dy] = 0, \quad (1.6)$$

é exata.

**Exemplo 3.** Considerando a equação não exata  $\frac{dy}{dx} + p(x)y = g(x)$  e o fator integrante como  $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$ , a solução é dada por  $y = \frac{\int \mu(x)g(x)dx + c}{\mu(x)}$ .

**Exemplo 4.** Considere a seguinte equação diferencial não exata:  $\frac{dy}{dx} + 3x^2y = 6x^2$ .

Chamando  $P(x) = 3x^2$ , temos como fator integrante  $\mu(x) = e^{\int 3x^2dx} = e^{x^3}$ .

Multiplicando ambos os lados da equação diferencial por  $e^{x^3}$ , obtemos:

$$e^{x^3} \frac{dy}{dx} + 3x^2 e^{x^3} y = 6x^2 e^{x^3},$$

$$\text{ou,} \quad \frac{d}{dx}(e^{x^3} y) = 6x^2 e^{x^3}.$$

Integrando ambos os lados, temos:

$$e^{x^3} y = \int 6x^2 e^{x^3} dx = 2e^{x^3} + C,$$

$$y = 2 + Ce^{-x^3},$$

que é a solução da equação diferencial, com  $C$  igual a uma constante arbitrária.

### 1.4.3 Equações Separáveis

**Definição 3.** *Sejam  $I \subset \mathbb{R}$  e uma função  $H : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Lembremos que uma primitiva de  $H$  em  $I$  é uma função  $G : I \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $G'(x) = H(x)$  para todo  $x \in I$ . Sendo  $G$  uma primitiva de  $H$ , sabemos que, para toda constante  $c$ ,  $G(x) + c$  também é uma primitiva de  $H$ . A família das primitivas de  $H$  é denominada de integral indefinida de  $G$  e denotada por [7]:*

$$\int H(x)dx = G(x) + c,$$

ou seja,

$$\int \frac{dG(x)}{dx} dx = \int H(x)dx = G(x) + c.$$

Isto é,  $\Phi(x) = G(x) + c$  é a solução da EDO:

$$\frac{d\Phi}{dx} = H.$$

**Exemplo 5.** *Considere a seguinte EDO de 1ª ordem:*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}.$$

Podemos reescrever a equação da seguinte maneira:

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x},$$

$$\int \frac{1}{y} dy = -\int \frac{1}{x} dx,$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln|c|,$$

então,  $y(x) = \frac{c}{x}$  é a solução geral da EDO, com “c” igual a uma constante arbitrária.

**Exemplo 6.** *Considere a seguinte EDO de 1ª ordem:  $y' = -\frac{(1+x)y}{(1-y)x}$ .*

Reordenando os termos, temos que:

$$\frac{1-y}{y} \frac{dy}{dx} = -\frac{1+x}{x},$$

$$\int \frac{1-y}{y} dy = -\int \frac{1+x}{x} dx,$$

$$\ln|y| - y = -\ln|x| - x + c,$$

então,  $\ln|x \cdot y| + x - y = c$  é a solução geral da EDO, com  $c$  igual a uma constante arbitrária qualquer.

#### 1.4.4 Equações Exatas

**Definição 4.** Uma expressão diferencial  $M(x, y)dx + N(x, y)dy$  é uma diferencial exata em uma região  $R$  do plano  $xy$  se ela corresponde à diferencial total de alguma função  $f(x, y)$ . Uma equação diferencial da forma  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$  é chamada de uma equação exata se a expressão do lado esquerdo é uma diferencial exata.

**Exemplo 7.** A equação  $x^2y^3dx + x^3y^2dy = 0$  é exata, pois utilizando derivadas parciais, temos:  
 $d(\frac{1}{3}x^3y^3) = \frac{d}{dx}(\frac{1}{3}x^3y^3) + \frac{d}{dy}(\frac{1}{3}x^3y^3) = x^2y^3dx + x^3y^2dy$ .

**Exemplo 8.** Resolva a equação diferencial

$$\{y\cos(x) + 2xe^y\} + \{\sen(x) + x^2e^y - 1\} \frac{dy}{dx} = 0.$$

Tomando  $M(x, y) = y\cos(x) + 2xe^y$ , é fácil ver que a equação dada é exata. Logo, existe  $\Phi(x, y)$  tal que:

$$\Phi_x(x, y) = y\cos(x) + 2xe^y \quad e \quad \Phi_y(x, y) = \sen(x) + x^2e^y - 1.$$

Integrando a 1ª destas equações, obtemos

$$\Phi(x, y) = y\sen(x) + x^2e^y + g(y). \tag{1.7}$$

Fazendo  $\Phi_y = N$ , temos:

$$\Phi_y(x, y) = \sen(x) + x^2e^y + g'(y) = \sen(x) + x^2e^y - 1.$$

Portanto,  $g'(y) = -1$  e  $g(y) = -y$ . Neste caso a constante de integração pode ser omitida, já que serve qualquer solução da equação diferencial precedente.

Substituindo  $g(y)$  na equação 1.6, temos:

$$\Phi(x, y) = y \operatorname{sen}(x) + x^2 e^y - y.$$

Logo, a solução da equação proposta inicialmente é dada por:

$$y \operatorname{sen}(x) + x^2 e^y - y = C,$$

onde  $C$  é uma constante arbitrária qualquer.

### 1.4.5 Equações Não Exatas

Em geral, a equação diferencial

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \tag{1.8}$$

não é exata, mas se a equação  $\mu(x, y)[M(x, y)dx + N(x, y)dy] = 0$ , que resulta da multiplicação da equação 1.8 pela função  $\mu(x, y)$  que é um fator integrante, então a equação torna-se exata.

**Exemplo 9.** A equação  $(2y - 6x)dx + (3x - 4x^2y^{-1})dy = 0$  não é exata.

Utilizando  $\mu(x, y) = xy^2$ , segue que:

$$(2xy^3 - 6x^2y^2)dx + (3x^2y^2 - 4x^3y)dy = 0$$

Para esta equação, temos  $M = 2xy^3 - 6x^2y^2$  e  $N = 3x^2y^2 - 4x^3y$ .

Como  $\frac{dM}{dy}(x, y) = 6xy^2 - 12x^2y = \frac{dN}{dx}(x, y)$ , a equação é exata. Logo,  $\mu(x, y) = xy^2$  é na realidade um fator integrante da equação dada.



## Capítulo 2

# Aplicações das Equações Diferenciais de 1ª ordem

Neste capítulo vamos apresentar aplicações das equações diferenciais ordinárias, mostrando a interação da matemática com outras ciências.

Caso não existissem tantos problemas que necessitassem da matemática para sua resolução, poderíamos dizer que a mesma não iria possuir tanto valor, porém ao contrário disso, verificamos inúmeras aplicações como a probabilidade de acertos ou erros, cálculos de áreas e perímetros, entre outros casos que incentivaram o estudo e aperfeiçoamento das técnicas utilizadas. Estas aplicações não são diferentes quando o assunto são as equações diferenciais, pois são usadas para resolver vários tipos de problemas matemáticos que em sua maioria possuem aplicações.

Talvez a aplicação mais importante do cálculo sejam as equações diferenciais. Quando os físicos ou cientistas sociais usam o cálculo, em geral o fazem para analisar uma equação diferencial surgida no processo de modelagem de algum fenômeno que eles estão estudando. Embora seja frequentemente impossível encontrar uma fórmula explícita para a solução de uma equação diferencial. [16]

Uma aplicação prática e recorrente, principalmente na Física, é o estudo da Variação de Temperatura, conteúdo que possui aplicação direta no cotidiano escolar. Assim como na Biologia, onde também existe a aplicação das equações diferenciais, será utilizado neste trabalho o Modelo de Malthus para estudarmos o crescimento (ou decréscimo) da população escolar.

## 2.1 Variação de Temperatura

Utilizada frequentemente na Física, o estudo da variação de temperatura é de suma importância para entendimento dos fenômenos naturais, sendo aplicado em diversos problemas da humanidade, como o resfriamento ou aquecimento de alimentos para o consumo.

A lei de variação de temperatura de Newton afirma que a taxa de variação de temperatura de um corpo é proporcional à diferença de temperatura entre o corpo e o meio ambiente. Seja  $T$  a temperatura do corpo e  $T_m$  a temperatura do meio ambiente. Então, a taxa de variação da temperatura do corpo é  $\frac{dT}{dt}$ , e a lei de Newton relativa à variação de temperatura pode ser formulada como  $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m)$  ou como  $\frac{dT}{dt} + kT = kT_m$ , onde  $k$  é uma constante positiva de proporcionalidade.

Com base nesta definição pode-se escrever este modelo da seguinte forma:

$$\frac{dT}{dt} = kT_m - kT. \quad (2.1)$$

**Exemplo 10.** *Um corpo a  $100^\circ\text{C}$  é posto numa sala, onde a temperatura ambiente se mantém constante a  $25^\circ\text{C}$ . Após 5 minutos a temperatura do corpo caiu para  $90^\circ\text{C}$ . Decorrido quanto tempo estará o corpo a  $50^\circ\text{C}$ ?*

Sejam  $T$  a temperatura do corpo;  $t$  o tempo decorrido;  $T_m$  a temperatura ambiente, temos que:

Sabendo que  $T_m = 25^\circ\text{C}$ , podemos escrever:

$$\frac{dT}{dt} = kT_m - kT,$$

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m),$$

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 25),$$

$$\frac{dT}{T - 25} = k dt.$$

Integrando entre os limites de  $t$ , variando de 0 a 5 minutos e  $T$  variando de  $100^\circ\text{C}$  a  $90^\circ\text{C}$ , obtemos:

$$\int_{100}^{90} \frac{dT}{T - 25} = k \int_0^5 dt,$$

$$\ln(T - 25) \Big|_{100}^{90} = -kt \Big|_0^5,$$

$$\ln(65) - \ln(75) = -5k,$$

$$\ln\left(\frac{75}{65}\right) = 5k,$$

$$5k = 0,1431.$$

Integrando entre os limites de  $T$ , variando de  $100\text{ }^\circ\text{C}$  a  $50\text{ }^\circ\text{C}$  e,  $t$  variando de  $0$  a  $t$  minutos, conseguimos o instante exato em que a temperatura será  $50\text{ }^\circ\text{C}$ . Assim, segue que:

$$\int_{100}^{50} \frac{dT}{T - 25} = -k \int_0^t dt,$$

$$\ln(25) - \ln(75) = -kt,$$

$$\ln\left(\frac{75}{25}\right) = kt,$$

multiplicando ambos os membros por  $5$  e sabendo que  $5k = 0,1431$ , temos:

$$0,1431t = 5 \cdot \ln\left(\frac{75}{25}\right),$$

$$t = \frac{5 \cdot \ln(3)}{0,1431},$$

$$t \cong 38,39 \text{ min},$$

$$t \cong 38 \text{ min e } 23 \text{ s},$$

que é o tempo necessário para o corpo atingir a temperatura de  $50\text{ }^\circ\text{C}$ .

## 2.2 Juros Compostos

Considerando as atividades matemáticas no campo financeiro, temos as aplicações envolvendo os juros simples e compostos, sendo este último o mais aplicado pelas instituições financeiras.

Seja  $S$  um valor depositado em um banco a uma taxa de juros contínua  $r$ , por um determinado tempo  $t$ . Dessa maneira, podemos afirmar que a taxa de variação do valor depositado  $dS$  em relação à taxa de variação do tempo  $dt$  é igual ao produto da taxa de juros pelo valor do investimento, dado pela seguinte equação:

$$\frac{dS}{dt} = rS.$$

Separando as diferenciais, temos:

$$\frac{dS}{S} = rdt.$$

Integrando ambos os membros da equação, temos:

$$\int \frac{dS}{S} = \int rdt,$$

$$\ln|S| + \ln C_2 = rt + \ln C_1.$$

Colocando os dois membros na base  $e$ , aplicando a exponencial em ambos os lados, considerando  $C_1$  e  $C_2$  constantes arbitrárias e, fazendo  $\ln C_1 - \ln C_2 = \ln C$ , tem-se:

$$S(t) = Ce^{rt},$$

onde  $C$  é o valor da aplicação no instante inicial, logo  $C = S_0$ .

Logo, a equação para juros compostos calculado de forma contínua é:

$$S(t) = S_0e^{rt},$$

onde  $S(t)$  é o valor aplicado inicialmente,  $t$  é o tempo e  $r$  a taxa de rendimento.

**Exemplo 11.** *Um empréstimo de R\$8.000,00 é realizado a uma taxa de juros compostos de 10% ao ano, considerando que não foi feito nenhum pagamento nesse intervalo de tempo, qual será o valor a ser pago após um período de três anos?*

O valor inicial do empréstimo foi de R\$8.000,00, logo temos que  $S_0 = 8\ 000$ , a uma taxa de 10% a.a., durante três anos, logo  $t = 3$ .

Usando o modelo proposto para calcular juros compostos, temos que:

$$S(3) = 8000e^{0,1 \cdot 3}.$$

Resolvendo esta equação chegamos a conclusão de que o saldo devedor neste tempo será de R\$ 10.798,87.

## 2.3 Propagação da Podridão em Maçãs

A armazenagem de maçãs se dá em caixas de madeira que comportamem média 3000 frutas. Experimentalmente, verifica-se que se uma fruta estiver apodrecida, em doze dias, cerca de 80% das maçãs da caixa estarão podres [2].

**Exemplo 12.** *Suponha que a velocidade de propagação da podridão seja proporcional ao número de maçãs sadias  $3000 - x(t)$  e ao número de maçãs podres  $x(t)$  sendo  $m$  a razão de proporcionalidade.*

Nestas condições, a equação para o modelo é:

$$\frac{dx}{dt} = m(3000 - x)x,$$

sujeita à  $x(0) = 1$ , pois no instante  $t = 0$  supomos a existência de apenas uma maçã podre.

Por separação de variáveis, temos:

$$\frac{1}{x(3000 - x)} dx = m dt,$$

integrando os termos, temos:

$$\int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{3000 - x} dx = \int m dt,$$

Resolvendo as integrais encontramos:

$$\ln x - \ln(3000 - x) = 3000mt + D,$$

$$\frac{x}{3000 - x} = Ce^{3000mt},$$

e isolando a variável  $x(t)$  podemos determiná-la explicitamente:

$$x(t) = \frac{3000Ce^{3000mt}}{1 + Ce^{3000mt}}, \quad (2.2)$$

onde a constante  $C$  pode ser estimada usando a condição  $x(0) = 1$ . Substituindo  $x = 1$  e  $t = 0$  em 2.2, segue que:

$$\frac{3000C}{1 + C} = 1 \Rightarrow 2999C = 1 \Rightarrow C \cong \frac{1}{3000}.$$

Logo, podemos reescrever a equação 2.2 como:

$$x(t) = \frac{e^{3000mt}}{1 + \frac{1}{3000}e^{3000mt}} = \frac{3000e^{3000mt}}{3000 + e^{3000mt}} = \frac{3000}{1 + 3000e^{-3000mt}}. \quad (2.3)$$

Como  $x(12) = 2400$  a constante  $m$  de proporcionalidade também pode ser estimada por simples substituição em 2.3. De fato:

$$2400 = \frac{3000}{1 + 3000e^{-36000m}} \Rightarrow 4 + 12000e^{-36000m} = 5 \Rightarrow m = \frac{\ln 12000}{36000} \Rightarrow m \cong 0,000261.$$

Finalmente, substituindo  $m = 0,000261$  em 2.3 é possível escrever explicitamente a solução do modelo da propagação da podridão em maçãs:

$$x(t) = \frac{3000}{3000e^{-0,783t} + 1}. \quad (2.4)$$

O tempo (em dias) necessário para que a caixa toda com 3000 frutas esteja inteiramente podre não pode ser calculado a partir da equação 2.4, pois fazendo  $x(t) = 3000$  encontraríamos  $3000e^{-0,783t+1}=1$  que não tem solução.

Neste caso, uma boa estratégia é modificar a equação 2.4 para realizarmos previsões de tempo necessário para que cada *porcentagem* de frutas na caixa apodreça.

Devemos portanto, expressar  $t$  em função de  $x = 3000p$ , ou seja,

$$3000p = \frac{3000}{3000e^{-0,783t} + 1},$$

$$3000pe^{-0,783t} + p = 1,$$

$$e^{-0,783t} = \frac{1-p}{3000p}.$$

Usando logaritmos naturais, isolamos a variável  $t$ , obtendo assim:

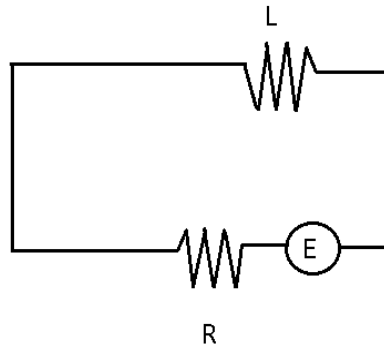
$$t = -\frac{1}{0,783} \cdot \ln \frac{1-p}{3000p}, \quad (2.5)$$

que apesar de não estar definida para  $p = 1$  (que equivale a 100% de maçãs podres), indica que uma boa estimativa pode ser conseguida tomando  $p$  suficientemente próximo de  $p = 1$ .

Fazendo  $p = 0,99$  em 2.5, temos:

$$t = -\frac{1}{0,783} \cdot \ln \frac{1-0,99}{3000 \cdot 0,99} \Rightarrow t \cong 16 \text{ dias}.$$

## 2.4 Circuito Elétrico



De acordo com a segunda lei de Kirchhoff, a soma da queda de tensão do indutor ( $L(\frac{di}{dt})$ ) e da queda de tensão no resistor ( $iR$ ) é igual a voltagem ( $E(t)$ ) do circuito [1,13].

Sendo assim, temos como equação básica, para o seguinte problema:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E(t), \quad (2.6)$$

onde:  $L$  é a indutância (henry);  $R$  é a resistência (ohm);  $i$  é a corrente (ampére);  $E$  é a força eletromotriz ou fem (volt).

**Exemplo 13.** Considere que uma força eletromotriz (fem) de 30 volts é aplicada a um circuito em série L-R, no qual a indutância é de 0,5 henry e a resistência é de 50 ohms.

Encontre a corrente  $i(t)$  se  $i(0) = 0$ . Determine a corrente quanto  $t \rightarrow \infty$ .

Do enunciado, sabemos que:  $L = 0,5$  henry;  $R = 50$  ohms;  $E = 30$  volts;  $i$  é a corrente.

Substituindo os dados do problema na equação 2.6, obtemos:

$$0,5 \frac{di}{dt} + 50i = 30,$$

dividindo a equação por 0,5, obtemos uma equação na forma

$$\frac{di}{dt} + 100i = 60, \quad (2.7)$$

sendo  $P(t) = 100$ , o próximo passo é calcular o fator integração  $\mu(t)$ , utilizando a seguinte relação:

$$\mu(t) = e^{\int 100(t)dy} \Rightarrow \mu(t) = e^{100t}.$$

Multiplicando a equação 2.7 por  $\mu(t)$ ,

$$e^{100t} \left( \frac{di}{dt} + 100i \right) = e^{100t} \cdot 60 \Rightarrow e^{100t} \frac{di}{dt} + 100e^{100t}i = 60e^{100t},$$

isto é,

$$\frac{d}{dt}[e^{100t} \cdot i] = 60e^{100t},$$

integrando a equação, segue que:

$$\int \frac{d}{dt}[e^{100t} \cdot i] dt = \int 60e^{100t} dt \Rightarrow e^{100t} \cdot i = 60 \cdot \frac{1}{100} e^{100t} + c.$$

Dividindo a equação por  $e^{100t}$ , temos que:

$$i = \frac{3}{5} + c \cdot e^{-100t}. \quad (2.8)$$

Usando a condição inicial onde  $i(0) = 0$ , na equação 2.8, temos:

$$0 = \frac{3}{5} + c \cdot e^{-100 \cdot 0} \Rightarrow c = -\frac{3}{5}.$$

Portanto, temos que



$$i = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}e^{-100t}.$$

Assim, passado um longo tempo a corrente é igual a  $\frac{3}{5} A$ .

## 2.5 Modelo de Malthus (Crescimento/Decrescimento Populacional)

O modelo de crescimento populacional mais conhecido é do economista inglês Thomas Malthus, apresentado em 1798. O modelo malthusiano pressupõe que a taxa segundo a qual a população de um país cresce em um determinado instante é proporcional à população total do país naquele instante. Matematicamente, se  $P(t)$  é a população total no instante  $t$ , então, o modelo contínuo de Malthus é [12]:

$$\frac{dP}{dt} = kP, \quad (2.9)$$

onde  $k$  é uma constante de proporcionalidade (nesse caso  $k > 0$ ). Esse modelo é utilizado no crescimento de pequenas populações em um curto intervalo de tempo, como por exemplo crescimento de bactérias, pois não leva em conta muitos fatores que podem influenciar a população tanto em seu crescimento quanto em seu declínio. Sabendo-se que uma certa população cresce segundo o modelo malthusiano e  $P(0) = P_0$ , então:

$$P = P_0 \cdot e^{kt}.$$

**Exemplo 14.** *Uma espécie de bactéria de nome “Escherichia coli”, responsável por mais de 50% dos casos de intoxicação alimentar, possui uma taxa de crescimento populacional de 80% a cada 30 minutos sob condições ambientais ideais. Assim, supondo uma população inicial de 100 mil dessas bactérias, responda ao seguinte questionamento: Quantas bactérias essa população terá depois de 60 minutos?*

Observemos que 30 minutos é o primeiro período de crescimento e a população inicial é de 100 mil bactérias. Se  $P(t)$  é a população no instante  $t$ , temos  $P_0 = 100000$ .

Sabemos que o crescimento em determinado período é a população do período anterior mais 80% dessa população.

Assim, temos a seguinte equação, sabendo que  $P(30) = 180000$ :

$$180000 = 100000e^{k \cdot 30},$$

$$\frac{18}{10} = e^{30 \cdot k} \Rightarrow \ln(1,8) = 30 \cdot k \Rightarrow k = 0,019593.$$

Logo, segue que:

$$P(60) = 100000e^{0,019593 \cdot 60} \cong 331.201,$$

que é a população de bactérias após 60 minutos.

Ressaltamos que neste trabalho não nos estenderemos ao estudo das EDO's de ordem superior a 1, pois procuramos soluções mais simples que possam ser aplicadas ao Ensino Médio, no entanto as mesmas podem ser estudadas em "Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Contorno", de William E. Boyce e Richard C. DiPrima [3].

## Capítulo 3

# Aplicação do Modelo de Malthus através de dados reais

Procurando contextualizar a aplicação das equações diferenciais , um levantamento da taxa de matrículas no Ensino Médio das escolas da Rede Estadual de Ensino de Mato Grosso do Sul, durante 6 anos (2010-2015) foi efetuado, através de consulta aos dados públicos disponibilizados pela Secretaria de Estado de Educação de Mato Grosso do Sul– SED/MS [14].

Os dados obtidos foram os seguintes:

Tabela 3.1: Número de matrículas no Ensino Médio da Rede Estadual de Mato Grosso do Sul - MS

Ano	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Número de Matrículas	281.939	279.496	267.606	258.111	252.352	246.302

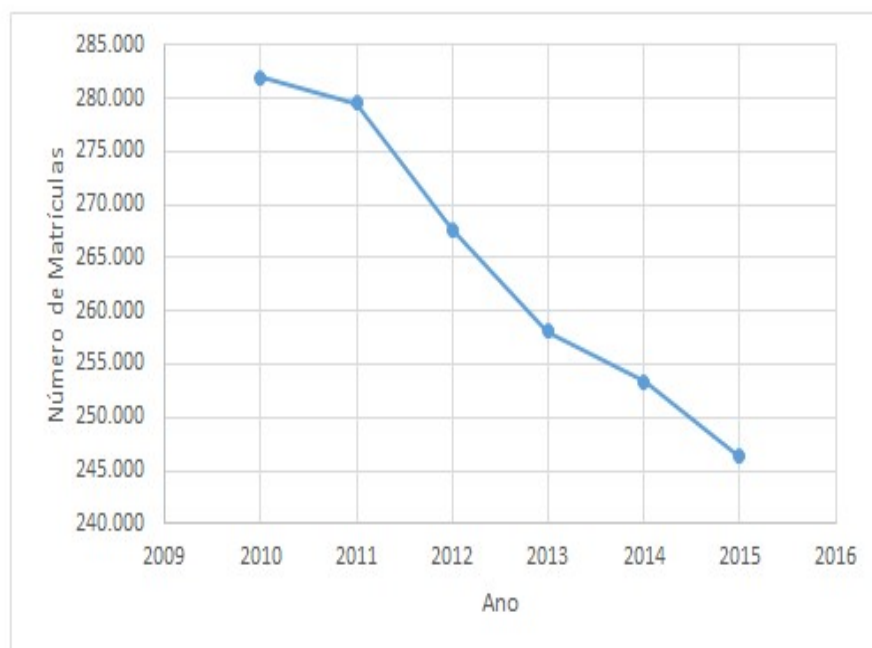


Figura 3.1: Gráfico da evolução de matrículas no Ensino Médio de 2010 à 2015 da Rede Estadual de Mato Grosso do Sul - MS.

### **3.1 Aplicação 1: Estimativa das Matrículas no Ensino Médio no estado de Mato Grosso do Sul - MS através do Modelo de Malthus**

As matrículas do ensino médio em rede nacional [8] possuem alguns dados específicos que também são observados na Rede Estadual de Mato Grosso do Sul e são apresentados a seguir:

- São 8,1 milhões de matrículas no ensino médio;
- 22,4% dos matriculados (1,8 milhões) estudam no período noturno;
- 95,6% dos matriculados frequentam escolas urbanas;

- 12,5% dos matriculados estão em escolas privadas. A rede privada cresceu 4,5% em oito anos;
- Com 6,9 milhões de matrículas, a rede estadual tem uma participação de 84,8% no total do ensino médio e concentra 96,9% das matrículas da rede pública;
- Nessa etapa de ensino, praticamente todos os matriculados (mais de 99%) estudam em escolas com esgoto sanitário, abastecimento de água e energia elétrica;
- 47,1% dos matriculados no ensino médio estudam em escolas com mais de 500 matrículas nessa etapa;
- 82% dos matriculados estudam em escolas com quadra de esportes. Em estabelecimentos com quadra de esportes coberta, o percentual cai para 62,5%;
- 91,2% dos matriculados estudam em escolas com biblioteca ou sala de leitura. Na zona rural, o acesso a esses espaços é de 66,8%;
- 61,3% dos matriculados estudam em escolas com banheiro adequado a alunos com deficiência ou mobilidade reduzida. Em relação às vias e dependências adequadas para o mesmo público, apenas 48,5% dos matriculados nesta etapa de ensino têm esses recursos na escola em que estudam. Os percentuais na rede privada com acesso a esses itens são de 67,8% e 56%, respectivamente;
- 95,8% dos matriculados estudam em escolas com banheiro dentro do prédio. Na zona rural, este percentual cai para 87,3%;
- 96,6% dos matriculados estudam em escolas em que há computadores para uso administrativo;
- 93% dos matriculados estudam em escolas em que há computadores para uso dos alunos;
- 89,5% dos matriculados têm acesso a laboratório de informática na escola em que estudam. Os matriculados da rede pública superam aqueles da privada no acesso a laboratório de informática, são 91,2% contra 77,1%, respectivamente;
- 57,4% dos matriculados estudam em escolas com laboratório de ciências. 72,4% dos matriculados da rede privada e 55,3% da rede pública têm acesso a este recurso na escola em que estudam;

- 96,5% dos matriculados estudam em escolas conectadas à internet. Essa proporção é ligeiramente maior na rede privada: são 98,3% contra 96,3% da rede pública;
- 6,4% dos matriculados no ensino médio permanecem 7h diárias ou mais em atividades escolares caracterizando-os como alunos de tempo integral. Em 2015 esse percentual era de 5,9%;

No cenário atual de Mato Grosso do Sul - MS, constata-se que tais ponderações acima relatadas são comuns à realidade do estado, confirmando mais uma vez que existe uma tendência de crescimento de matrículas na Rede Privada de Ensino e, conseqüentemente, uma queda no número de matrículas da Rede Pública Estadual de Educação. No apêndice deste trabalho apresentamos dados que corroboram tais fatos.

Considerando que a variação da taxa de matrícula e a variação do tempo  $t$  são proporcionais à população atual, conforme dados apresentados na tabela 3.1, e utilizando o modelo de Malthus, podemos determinar qual a expectativa para a taxa de matrículas na Rede Estadual de Mato Grosso do Sul - MS para o ano de 2018.

Assim, considerando  $P(0) = 281939$ ,  $t = 6$  anos, e  $P(5) = 246302$ , iremos encontrar o valor da constante  $k$  que se aplica aos nossos parâmetros.

Dessa maneira, segue que:

$$246302 = 281939 \cdot e^{6k},$$

$$\frac{246302}{281939} = e^{6k},$$

$$\ln \left| \frac{246302}{281939} \right| = \ln(e^{6k}),$$

$$-0,1351 = 6k,$$

$$k = -0,0225.$$

Projetando a taxa de matrículas da Rede Estadual de Ensino do Estado de Mato Grosso do Sul - MS para o ano de 2018, a partir do resultado obtido no ano de 2015, no qual a população escolar é  $P(5) = 246302$  e  $k = -0,0225$ , temos que:

$$P(8) = 246302e^{-0,0225 \cdot 3},$$

$$P(8) = 246302e^{-0,0675},$$

$$P(8) \cong 230.225.$$

onde  $P(8)$  representa a quantidade prevista de matrículas para o ano em questão.

Constata-se porém, que não é possível encontrar um padrão na taxa de decrescimento das matrículas ano a ano, visto que em 2016 houve um aumento deste valor (situação que será apresentada no próximo capítulo) e, analisando de forma mais precisa a evolução desses dados observa-se que as EDO's de Primeira Ordem, para o tema proposto, não se configuram como a melhor ferramenta para representar a expectativa de matrículas para momentos posteriores, uma vez que necessitaríamos de EDO's de Segunda Ordem, com o discriminante negativo ( $\Delta < 0$ ), pois estas são as que mais se aproximam da realidade pesquisada, sendo também características de um oscilador harmônico, possibilitando maior clareza na compreensão dos valores. Porém, as mesmas não serão objetos de estudo deste trabalho, como já dito anteriormente. Desta maneira, no próximo capítulo, apresentaremos outro possível método de solução para o problema levantado.

# Capítulo 4

## Interpolação Polinomial: Os Polinômios de Lagrange

Como dito a priori, é possível, dado um conjunto de dados, determinarmos um polinômio que melhor se ajusta a esses dados.

Interpolar uma função  $f(x)$  consiste em aproximar essa função por uma outra função  $g(x)$ , escolhida entre uma classe de funções definida a priori e que satisfaça algumas propriedades. A função  $g(x)$  é então usada em substituição à função  $f(x)$  [2].

$x_0$	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$
$y_0$	$y_1$	$y_2$		$y_n$

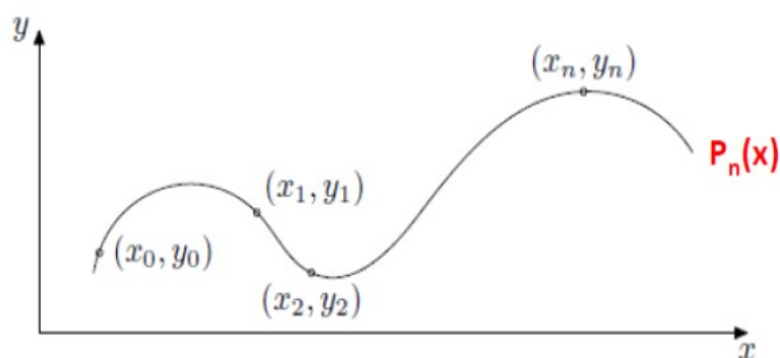


Figura 4.1: Esboço de uma função interpolante  $P_n(x)$ .

A necessidade de se efetuar esta substituição surge em várias situações, como por exemplo:

1. quando são conhecidos somente os valores numéricos da função para um conjunto de



pontos e é necessário calcular o valor da função em um ponto não tabelado;

2. quando a função em estudo tem uma expressão tal que operações como a diferenciação e a integração são difíceis (ou mesmo impossíveis) de serem realizadas.

## 4.1 Forma de Lagrange para o Polinômio de Interpolação

Sejam  $x_0, x_1, \dots, x_n$ ,  $(n + 1)$  pontos distintos e  $y_i = f(x_i)$ ,  $i = 0, \dots, n$ .

Seja  $p_n(x)$  o polinômio de grau  $\leq n$  que interpola  $f$  em  $x_0, \dots, x_n$ . Podemos representar  $p_n(x)$  na forma  $p_n(x) = y_0.L_0(x) + y_1.L_1(x) + \dots + y_n.L_n(x)$ , onde os polinômios  $L_k(x)$  são de grau  $n$ ,  $i \in N, 0 < i < n$ .

Para cada  $i$ , queremos que a condição  $p_n(x_i) = y_i$  seja satisfeita, onde  $(x_i) < \text{população total}$ , ou seja [2]:

$$p_n(x_i) = y_0.L_0(x_i) + y_1.L_1(x_i) + \dots + y_n.L_n(x_i) = y_i,$$

A forma mais simples de se satisfazer esta condição é impor:

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 0, & \text{se } k \neq i, \\ 1, & \text{se } k = i \end{cases} \quad \text{e, para isso, definimos } L_k(x) \text{ por :}$$

Com  $i, k \in N$ .

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\dots(x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\dots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\dots(x_k - x_n)}.$$

Veja que não é difícil verificar o fato de  $L_k(x_k) = 1$  e  $L_k(x_i) = 0$ , se para todo  $i \neq k$ , com  $i, k \in N, 0 < i \leq k < n$ .

Como o numerador de  $L_k(x)$  é um produto de  $n$  fatores da forma  $(x - x_i)$ ,  $i = 0, \dots, n, i \neq k$ , então  $L_k$  é um polinômio de grau  $n$  e, assim,  $p_n(x)$  é um polinômio de grau menor ou igual a  $n$ .

Além disso, para  $x = x_i$ ,  $i = 0, \dots, n$  temos:

$$p_n(x_i) = \sum_{k=0}^n y_k.L_k(x_i) = y_i.L_i(x_i) = y_i.$$

Então, a forma de Lagrange para o polinômio interpolador é:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k \cdot L_k(x),$$

onde,

$$L_k(x) = \frac{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n (x - x_j)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n (x_k - x_j)}.$$

Vejam os de forma prática, o exemplo a seguir.

**Exemplo 15.** *Considere a tabela:*

x	-1	0	2
f(x)	4	1	-1

Pela forma de Lagrange, temos que:

$$p_2(x) = y_0 \cdot L_0(x) + y_1 \cdot L_1(x) + y_2 \cdot L_2(x), \text{ onde :}$$

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 0)(x - 2)}{(-1 - 0)(-1 - 2)} = \frac{x^2 - 2x}{3}.$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x + 1)(x - 2)}{(0 + 1)(0 - 2)} = \frac{x^2 - x - 2}{-2}.$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x + 1)(x - 0)}{(2 + 1)(2 - 0)} = \frac{x^2 + x}{6}.$$

Assim na forma de Lagrange,

$$p_2(x) = 4 \left( \frac{x^2 - 2x}{3} \right) + 1 \left( \frac{x^2 - x - 2}{-2} \right) + (-1) \left( \frac{x^2 + x}{6} \right),$$

que, agrupando os termos semelhantes, resulta em:

$$p_2(x) = 1 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}x^2.$$

## 4.2 Aplicação 2: Estimativa das Matrículas no Ensino Médio no estado de Mato Grosso do Sul - MS através da Interpolação de Lagrange

Tabela 4.1: Número de matrículas no Ensino Médio da Rede Estadual de Mato Grosso do Sul - MS considerando os valores até o ano de 2016.

Ano	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Número de Matrículas	281.939	279.496	267.606	258.111	252.352	246.302	257.923

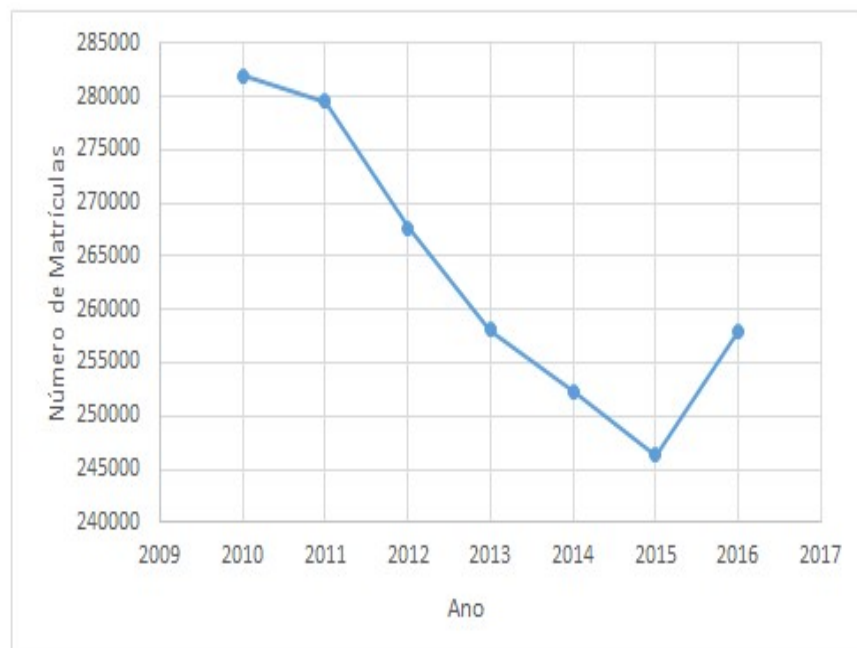


Figura 4.2: Gráfico da evolução de matrículas no Ensino Médio de 2010 à 2016 da Rede Estadual de Mato Grosso do Sul - MS.

Agora, utilizando os valores apresentados na tabela 4.1 e aplicando o Método da Interpolação de Lagrange, iremos encontrar  $p_n(x)$ , com  $n$  igual ao grau máximo do polinômio que melhor se ajusta aos parâmetros pesquisados e, desta maneira, utilizando a função encontrada, poderemos

estimar o valor do número de matrículas na Rede Estadual de Mato Grosso do Sul - MS para um período futuro, de modo que este valor seja mais confiável em relação ao apresentado anteriormente (Modelo de Malthus).

Logo, considerando 2010 como o ano em que  $n = 0$ , tal que  $n \in N$ , ou seja  $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4, x_5 = 5$  e  $x_6 = 6$ , segue que:

$$p_6(x) = y_0 \cdot L_0(x) + y_1 \cdot L_1(x) + y_2 \cdot L_2(x) + y_3 \cdot L_3(x) + y_4 \cdot L_4(x) + y_5 \cdot L_5(x) + y_6 \cdot L_6(x).$$

Agora, iremos calcular os valores dos polinômios  $L_k$ , com  $0 \leq k \leq 6$ . Dessa maneira, temos:

Para  $k = 0$ ,

$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)}{(0-1)(0-2)(0-3)(0-4)(0-5)(0-6)},$$

$$L_0(x) = \frac{(x^2-3x+2)(x^2-7x+12)(x^2-11x+30)}{(-1)(-2)(-3)(-4)(-5)(-6)},$$

$$L_0(x) = \frac{(x^4-10x^3+35x^2-50x+24)(x^2-11x+30)}{720},$$

$$L_0(x) = \frac{x^6}{720} - \frac{21x^5}{720} + \frac{175x^4}{720} - \frac{735x^3}{720} + \frac{1624x^2}{720} - \frac{1764x}{720} + \frac{720}{720}.$$

Para  $k = 1$ ,

$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)}{(1-0)(1-2)(1-3)(1-4)(1-5)(1-6)},$$

$$L_1(x) = \frac{(x^2-2x)(x^2-7x+12)(x^2-11x+30)}{1 \cdot (-1)(-2)(-3)(-4)(-5)},$$

$$L_1(x) = \frac{(x^4-9x^3+26x^2-24x)(x^2-11x+30)}{(-120)},$$

$$L_1(x) = -\frac{x^6}{120} + \frac{20x^5}{120} - \frac{155x^4}{120} + \frac{580x^3}{120} - \frac{1044x^2}{120} + \frac{720x}{120}.$$

Para  $k = 2$ ,

$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)}{(2-0)(2-1)(2-3)(2-4)(2-5)(2-6)},$$

$$L_2(x) = \frac{(x^2-x)(x^2-7x+12)(x^2-11x+30)}{2.1.(-1)(-2)(-3)(-4)},$$

$$L_2(x) = \frac{(x^4-8x^3+19x^2-12x)(x^2-11x+30)}{48},$$

$$L_2(x) = \frac{x^6}{48} - \frac{19x^5}{48} + \frac{137x^4}{48} - \frac{461x^3}{48} + \frac{702x^2}{48} - \frac{360x}{48}.$$

Para  $k = 3$ ,

$$L_3(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)(x-4)(x-5)(x-6)}{(3-0)(3-1)(3-2)(3-4)(3-5)(3-6)},$$

$$L_3(x) = \frac{(x^2-x)(x^2-6x+8)(x^2-11x+30)}{3.2.1.(-1)(-2)(-3)},$$

$$L_3(x) = \frac{(x^4-7x^3+14x^2-8x)(x^2-11x+30)}{(-36)},$$

$$L_3(x) = -\frac{x^6}{36} + \frac{18x^5}{36} - \frac{121x^4}{36} + \frac{372x^3}{36} - \frac{508x^2}{36} + \frac{240x}{36}.$$

Para  $k = 4$ ,

$$L_4(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)(x-6)}{(4-0)(4-1)(4-2)(4-3)(4-5)(4-6)},$$

$$L_4(x) = \frac{(x^2-x)(x^2-5x+6)(x^2-11x+30)}{4.3.2.1.(-1)(-2)},$$

$$L_4(x) = \frac{(x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x)(x^2 - 11x + 30)}{48},$$

$$L_4(x) = \frac{x^6}{48} - \frac{17x^5}{48} + \frac{107x^4}{48} - \frac{307x^3}{48} + \frac{396x^2}{48} - \frac{180x}{48}.$$

Para  $k = 5$ ,

$$L_5(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-6)}{(5-0)(5-1)(5-2)(5-3)(5-4)(5-6)},$$

$$L_5(x) = \frac{(x^2 - x)(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 10x + 24)}{5.4.3.2.1.(-1)},$$

$$L_5(x) = \frac{(x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x)(x^2 - 10x + 24)}{(-120)},$$

$$L_5(x) = -\frac{x^6}{120} + \frac{16x^5}{120} - \frac{95x^4}{120} + \frac{260x^3}{120} - \frac{324x^2}{120} + \frac{144x}{120}.$$

Para  $k = 6$ ,

$$L_6(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(6-0)(6-1)(6-2)(6-3)(6-4)(6-5)},$$

$$L_6(x) = \frac{(x^2 - x)(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 9x + 20)}{6.5.4.3.2.1},$$

$$L_6(x) = \frac{(x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x)(x^2 - 9x + 20)}{720},$$

$$L_6(x) = \frac{x^6}{720} - \frac{15x^5}{720} + \frac{85x^4}{720} - \frac{225x^3}{720} + \frac{274x^2}{720} - \frac{120x}{720}.$$

Substituindo os termos agora conhecidos na expressão  $p_6(x) = y_0.L_0(x) + y_1.L_1(x) + y_2.L_2(x) + y_3.L_3(x) + y_4.L_4(x) + y_5.L_5(x) + y_6.L_6(x)$ , temos que:

$$p_6(x) = 281939.L_0(x) + 279496.L_1(x) + 267606.L_2(x) + 258111.L_3(x) + 252352.L_4(x)$$

$$+246302.L_5(x) + 257923.L_6(x).$$

Assim,

$$\begin{aligned} p_6(x) = & 281939. \left( \frac{x^6}{720} - \frac{21x^5}{720} + \frac{175x^4}{720} - \frac{735x^3}{720} + \frac{1624x^2}{720} - \frac{1764x}{720} + \frac{720}{720} \right) + \\ & +279496. \left( -\frac{x^6}{120} + \frac{20x^5}{120} - \frac{155x^4}{120} + \frac{580x^3}{120} - \frac{1044x^2}{120} + \frac{720x}{120} \right) + \\ & +267606. \left( \frac{x^6}{48} - \frac{19x^5}{48} + \frac{137x^4}{48} - \frac{461x^3}{48} + \frac{702x^2}{48} - \frac{360x}{48} \right) + \\ & +258111. \left( -\frac{x^6}{36} + \frac{18x^5}{36} - \frac{121x^4}{36} + \frac{372x^3}{36} - \frac{508x^2}{36} + \frac{240x}{36} \right) + \\ & +252352. \left( \frac{x^6}{48} - \frac{17x^5}{48} + \frac{107x^4}{48} - \frac{307x^3}{48} + \frac{396x^2}{48} - \frac{180x}{48} \right) + \\ & +246302. \left( -\frac{x^6}{120} + \frac{16x^5}{120} - \frac{95x^4}{120} + \frac{260x^3}{120} - \frac{324x^2}{120} + \frac{144x}{120} \right) + \\ & +257923. \left( \frac{x^6}{720} - \frac{15x^5}{720} + \frac{85x^4}{720} - \frac{225x^3}{720} + \frac{274x^2}{720} - \frac{120x}{720} \right). \end{aligned}$$

Colocando em ordem os termos:

$$\begin{aligned} p_6(x) = & 391,58.(x^6 - 21x^5 + 175x^4 - 735x^3 + 1624x^2 - 1764x + 720) + \\ & +388,19.(-6x^6 + 120x^5 - 930x^4 + 3480x^3 - 6264x^2 + 4320x) + \\ & +371,68.(15x^6 - 285x^5 + 2055x^4 - 6915x^3 + 10530x^2 - 5400x) + \\ & +358,49.(-20x^6 + 360x^5 - 2420x^4 + 7440x^3 - 10160x^2 + 4800x) + \\ & +350,49.(15x^6 - 255x^5 + 1605x^4 - 4605x^3 + 5940x^2 - 2700x) + \end{aligned}$$

$$+342,09.(-6x^6 + 96x^5 - 570x^4 + 1560x^3 - 1944x^2 + 864x)+$$

$$+358,23.(x^6 - 15x^5 + 85x^4 - 225x^3 + 274x^2 - 120x).$$

Efetuando as multiplicações e agrupando os termos semelhantes, chegamos ao polinômio interpolador procurado.

$$p_6(x) = 30,88x^6 - 420,54x^5 + 1761,10x^4 - 859,50x^3 - 9121,58x^2 + 6168,84x + 281939 \quad (4.1)$$

Tomando posse do Polinômio Interpolador 4.1, e fazendo  $x = 8$ , temos que:

$$p_6(8) = 30,88.8^6 - 420,54.8^5 + 1761,10.8^4 - 859,50.8^3 - 9121,58.8^2 + 6168,84.8 + 281939,$$

$$p_6(8) = 8095006,72 - 13780254,72 + 7213465,6 - 440064 - 583781,12 + 49350,72 + 281939,$$

$$p_6(8) = 835.662.$$



# Capítulo 5

## Considerações Finais

Apresentando uma abordagem didática e prática das equações diferenciais, este trabalho trouxe algumas aplicações do conteúdo proposto em diferentes áreas do ensino, resolução de diferentes equações diferenciais ordinárias, bem como uma projeção para a taxa de matrícula das escolas da Rede Estadual de Ensino de Mato Grosso do Sul – MS, bem como um breve relato da sua evolução histórica.

Observando os gráficos 3.1 e 4.2, temos que no intervalo 2010 - 2015 as funções obtidas pelo modelo de Malthus e pela Interpolação de Lagrange são equivalentes.

No entanto, ao acrescentarmos o valor do ano de 2016, gráfico 4.2, valor que não segue a taxa de decrescimento dos anos anteriores, não é mais possível utilizarmos o modelo de Malthus e o método da Interpolação de Lagrange também não pode ser parâmetro para determinar dados futuros.

De fato, no gráfico 4.2, verifica-se que existe uma curvatura, e como não temos dados disponíveis posteriores a 2016, dá-se a entender que o número de matrículas cresce substancialmente, dando uma projeção para o ano de 2020 maior que a própria população do estado, o que é uma inverdade para a realidade do estado, além de ser um valor superior ao número de pessoas em ano escolar nesta faixa etária.

Também verifica-se que a queda da taxa de matrículas ocorreu no cenário nacional, uma vez que o Brasil teve uma pequena queda no número de matrículas na educação básica. Em 2016, havia 48,8 milhões alunos no sistema educacional do país, quantidade ligeiramente maior aos 48,6 milhões registrados em 2017, dados divulgados no Censo Escolar da Educação Básica 2017. Nota-se que a redução acontece no ensino fundamental e no médio pelo quarto ano consecutivo, porém o Ministério da Educação aponta um fator positivo que impacta na redução

de matriculados nessas etapas: a melhoria do fluxo escolar. Dados mostram que entre 2013 e 2017 a taxa de aprovação nessa fase da escolarização aumentou 2,8 pontos percentuais, ou seja, mais alunos têm conseguido se formar e não ficam retidos na etapa.

Aliado aos resultados apresentados, é imprescindível relatar que devido ao crescimento econômico das classes *C* e *D* entre 2002 e 2012, houve uma migração considerável de alunos para as escolas da rede privada de ensino.

Um das propostas de se abordar o ensino hoje, e que ainda não é muito compreendido por grande parte dos professores, é a questão da interdisciplinaridade, a qual é proposta a partir da reformulação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional - LDB [6], com temas transversais e a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina. Na perspectiva escolar, a interdisciplinaridade não tem a pretensão de criar novas disciplinas ou saberes, mas de utilizar os conhecimentos de várias para resolver um problema concreto ou compreender um determinado fenômeno sob diferentes pontos de vista. Em suma, a interdisciplinaridade tem uma função instrumental, trata-se de recorrer a um saber diretamente útil e utilizável para responder às questões e aos problemas sociais contemporâneos.

Os professores precisam estar aptos a repensar a organização disciplinar e dos anos escolares, no sentido de abrir possibilidades para que os educandos realizem percursos formativos mais diversificados, mais apropriados às suas condições de vida. Contudo vemos a defasagem pela variedade de idade dos alunos, pela falta de preparo dos professores ou dos métodos adotados pelo currículo escolar, uma vez que a escola tem que ajustar o fazer pedagógico às necessidades dos alunos.

Sabendo disso, a pesquisa apresenta possibilidades de assegurar um ensino contextualizado e interdisciplinar que trate de questões sociais, buscando responder as necessidades do momento atual, proporcionando o desenvolvimento de conhecimentos mais amplos, que possibilitem uma visão de mundo crítica. Para um ensino contextualizado devemos entrar no universo cultural dos educandos valorizando o conhecimento e saberes construídos nas práticas de trabalho e convivência no meio popular. Essa referência curricular de temas geradores pertinentes à experiência sociocultural dos alunos e fortemente influenciadas pela proposta freireana e pela Abordagem Temática [1, 10].

Aliado a modelagem matemática, o conceito de Polinômio de Lagrange, que é de entendimento simples, juntamente com as Equações Diferenciais, podem ser utilizados também para

contribuir nas diversas áreas de conhecimento.

# Apêndice

Tabela 5.1: Taxa de Fecundidade por Mulher em Período Fértil no estado de Mato Grosso do Sul - MS entre os anos de 1980 e 2016.

Ano	Taxa de Fecundidade Total por Mulher em Período Fértil em MS
1980	4,63
1991	3,33
1996	2,46
2000	2,40
2001	2,23
2006	2,07
2011	1,97
2016	1,91

Tabela 5.2: Taxa de Matrículas na Rede Privada de Ensino do Estado de Mato Grosso do Sul - MS entre os anos de 2010 e 2014.

Ano	Taxa de Matrícula da Rede Privada de Ensino de MS
2010	79.403
2011	82.146
2012	85.138
2013	88.325
2014	94.547

Analisando as tabelas 5.1 5.2, podemos observar que em períodos equivalentes, no estado de Mato Grosso do Sul - MS, houve constante queda na taxa de matrícula da Rede Pública Estadual de Ensino e queda na taxa de natalidade.

Verifica-se também um aumento significativo no número de matrículas da Rede Privada de Ensino no mesmo período.

Ressalta-se que o resultado obtido durante a realização desta pesquisa não deve ser analisado como uma queda na qualidade da educação pública e sim observado com atenção, pois fatores como a taxa de fecundidade brasileira passou de 2,14 filhos por mulher em 2005 para 1,74 filhos em 2015, mesmo período que a taxa de matrículas na rede privada aumentou 18,6%.

Porém um estudo detalhado sobre estes novos dados não foi realizado, desta maneira não podemos afirmar que existe uma relação entre o número de matrículas da Rede Estadual de Ensino, taxa de fecundidade e matrículas na Rede Privada no estado de Mato Grosso do Sul - MS.

# Referências Bibliográficas

1. ANGOTTI, J. A.; PERNAMBUCO, M.M. Ensino de Ciências: fundamentos e métodos. São Paulo: Cortez, 2002.
2. BASSANEZI, R. C. Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2002.
3. BOYCE, Willian E; DIPRIMA, Richard C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. Tradução: Vália de Magalhães Iorio. 8<sup>a</sup> ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.
4. BOYER, Carl B. História da Matemática. Tradução: Elza F. Gomide. 2<sup>a</sup> ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.
5. BRASIL. Censo Escolar da Educação Básica 2016. Notas Estatísticas, Brasília-DF — Fevereiro de 2017.
6. BRASIL. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Lei n. 9394 de 20 de dezembro de 1996. PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília : MEC/SEF, 1997.
7. BRONSON, Richard. Moderna Introdução as Equações Diferenciais, 3<sup>a</sup> ed. 1977.
8. CENSO ESCOLAR DA EDUCAÇÃO BÁSICA 2016 - Notas Estatísticas, Brasília-DF — Fevereiro de 2017.
9. CHAPMAN A.J.: Transmision de calor, Editorial Libreria Editorial Bellisco, Madrid, 3<sup>a</sup> Edicion, 1990.
10. DELIZOICOV, D. (1980). Rapport sur le projet de formation des professeurs de sciences naturelles en Guiné Bissau: Bilan 1979-1980. Paris: IRFED, 1980.

11. DIAGNÓSTICO SOCIOECONÔMICO DE MATO GROSSO DO SUL - MS, 2015.
12. HENRIQUES, Abel. Thomas Robert Malthus: A Teoria Malthusiana. Coimbra, Portugal. Instituto Politécnico de Coimbra, 2007. Disponível em <http://www.miniweb.com.br/Ciencias/artigos/malthus.html>, acessado em 20 de janeiro 2018.
13. HOLMAN, J. P.: Transferencia de Calor, 8ª edicion, Mc Graw-Hill, Madrid, 1998.
14. SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO. Disponível em: < [www.sed.ms.gov.br/censo-escolar - 6/](http://www.sed.ms.gov.br/censo-escolar-6/) >. Acesso em 15 de janeiro de 2018.
15. SEMADE - Secretaria de Estado de Meio Ambiente e Desenvolvimento Econômico. DIAGNÓSTICO SOCIOECONÔMICO DE MATO GROSSO DO SUL - 2015.
16. STEWART, James. Cálculo. Tradução: Antonio Carlos Moretti; Antonio Carlos Gilli Martins. Vol. II, 5ª ed. São Paulo: Thomson Learning, 2007.
17. ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. Equações Diferenciais. Volume 01. 3ª Edição. Pearson Education, 2001.