APRENDIZAGEM DE ÁREAS EM TRIÂNGULOS E QUADRILÁTEROS: UM ESTUDO SOBRE A HEURÍSTICA E A RECONFIGURAÇÃO

Cleide Ribeiro Mota Arinos[33]
cleide.arinos@hotmail.com.br.
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
https://orcid.org/0000-0001-9510-5590

José Luiz Magalhães de Freitas[34]
joseluizufms2@gmail.com.
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
https://orcid.org/0000-0001-5536-837X

Resumo: Este artigo trata da heurística no cálculo de áreas de triângulos e quadriláteros. As atividades foram propostas a alunos do quinto e do sexto anos do Ensino Fundamental de uma escola privada de Campo Grande/MS. Com esses alunos foi desenvolvida uma sequência de atividades, nas quais se observou procedimentos de tratamentos figurais, principalmente, a reconfiguração por possibilitar a produtividade heurística com o objetivo de encontrar na própria figura caminhos para determinar sua área. Apresenta-se uma breve discussão teórica sobre esta operação e alguns resultados sobre o uso da reconfiguração nas figuras como exploração heurística. Conclui-se que a visualização, articulada com a linguagem e os tratamentos figurais que as figuras permitem, contribui para a aprendizagem de área, oportunizando ao discente outros modos de pensar e raciocinar.

Palavras-chave: Visualização. Reconfiguração geométrica. Áreas. Ensino Fundamental.

Introdução

Diversas pesquisas realizadas em Educação Matemática, nos últimos tempos, mostram o desempenho insatisfatório dos estudantes em questões relativas ao campo das grandezas geométricas. Para o ensino da geometria euclidiana, particularmente, o uso de figuras é fundamental. Para a aprendizagem do conceito de área a figura desempenha um papel importante, quer pelo seu suporte intuitivo ou por sua função heurística. Para tanto, o ensino

[33] Mestre em Educação Matemática – PPGEduMat/UFMS. Professora na SEMED – Secretaria municipal de Ensino de Campo Grande, MS, Brasil.
[34] Doutor em Didática da Matemática. Professor do Programa de Pós Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul/UFMS. Campo Grande, MS, Brasil.

pode lançar mão das figuras geométricas para mediar os conhecimentos geométricos, desenvolvendo também a visualização, a linguagem e o discurso.

Flores e Moretti (2006) lembram que privilegiar a visualização nos métodos didáticos com ênfase na heurística na resolução de problemas matemáticos se deve ao fato de acreditar que o incentivo a essa habilidade "poderá suprir uma deficiência do ensino convencional ao mesmo tempo em que complementaria o quadro de um aprendizado de outra forma incompleto" (FLORES; MORETTI, 2006, p. 6).

Sendo assim, neste trabalho, buscamos enfatizar a visualização e a heurística em triângulos e quadriláteros a partir da reconfiguração[35] e desconstrução dimensional para o cálculo de áreas. Apresenta-se uma discussão teórica e alguns resultados do uso da reconfiguração no cálculo de áreas no Ensino Fundamental decorrente da pesquisa em Educação Matemática de Arinos (2018).

Este estudo buscou estudar produções de alunos do quinto e do sexto anos do Ensino Fundamental, por meio de atividades que exploram a heurística nas figuras geométricas, que exige outro modo de olhar para as figuras que os estudantes não estão habituados.

O papel heurístico de uma figura geométrica

Para Duval (2005), a geometria exige do aluno a articulação do gesto, da linguagem e do olhar. Ver geometricamente uma figura exige um longo treinamento, pois a percepção é imediata e automática. Isso pode facilitar ou inibir a compreensão do problema, pelo fato de que uma mesma figura pode ser usada em atividades diferentes e, neste caso, o que a comanda são os enunciados, as hipóteses. Assim, uma figura geométrica não é o que ela mostra, mas o que está no enunciado é que a comanda. Além disso, Duval (2005) lembra que normalmente as figuras geométricas presentes no ensino são restritas, perceptivelmente notáveis e culturalmente familiares. O que dificulta o ensino da geometria, visto que seu ensino se baseia muito na percepção, não se mobilizam atividades que explorem outras possibilidades de ver as figuras, como a visualização não icônica[36], a linguagem, a heurística e a reconfiguração.

---

[35] A reconfiguração é um tipo de tratamento figural nas figuras geométricas. Esse procedimento consiste em decompor a figura de partida em subfiguras, reorganizá-las de modo a formar outra figura que seja possível calcular sua área.

[36] A visualização não icônica implica desconstruir as formas visualmente reconhecidas em outras. Apresentaremos mais esclarecimentos e exemplos neste artigo.

Privilegiar a visualização, a heurística e a reconfiguração para o cálculo de áreas requer mobilizar atividades que permitam essas explorações. Isso possibilita dar outro sentido à figura geométrica, a fim de manipulá-la, quer por um processo físico ou mental, sobre parte dela ou de seu todo. Trata-se da *apreensão operatória* sobre a figura, que é “uma apreensão centrada nas modificações possíveis de uma figura inicial e nas reorganizações possíveis dessas modificações. Para cada tipo de modificação, são diversas as operações possíveis” (DUVAL, 2012b, p. 125).

As figuras em geometria podem ser modificadas de diversas maneiras, porém, destacaremos aqui os processos de decomposições, composições e reconfigurações nas figuras geométricas, exercendo elas assim o seu papel heurístico, que é o “resultado da conexão entre as apreensões operatória (que é subordinada pela apreensão perceptiva) e discursiva” (MORETTI; BRANDT, 2015, p. 605).

A seguir iremos tratar acerca da reconfiguração, por ser um tipo de tratamento figural, que concede às figuras geométricas seu papel heurístico no cálculo de áreas. A reconfiguração se apoia na percepção, por permitir modificar ou decompor a figura em outras unidades de mesma dimensão ($2D$), reconfigurando-as em outra figura para calcular a área e as desconstruções dimensionais ($2D \rightarrow 1D$) para aplicar as fórmulas algébricas, sendo estes dois modos incompatíveis de visualização. A apreensão operatória por meio da operação de reconfiguração permite modificar as figuras com invariância de área. Isso, muitas vezes, torna os cálculos de áreas mais simples, contribui com a visualização geométrica, que é comandada pela percepção que se tem sobre uma figura e que precisa ser transposta.

Reconfiguração como possibilidade heurística para o cálculo de áreas

A reconfiguração consiste em dividir uma figura geométrica “*em unidades figurais de mesma dimensão* (2D→2D) e sua reconfiguração em outra figura cujo contorno global é ou não o mesmo” (DUVAL, 2011, p. 88, itálico do autor). Os tratamentos figurais surgem, nesse caso, dependendo da modificação realizada, “repartir uma figura em subfiguras permite, por exemplo, evidenciar a igualdade de áreas” (DUVAL, 2012b, p. 125).

A operação de reconfiguração é realizada a partir de uma decomposição de uma figura inicial. Isso pode ser feito com materiais manipuláveis, por exemplo: a malha quadriculada, o geoplano e o tangram. Graficamente essa operação se traduz pela adição de um ou mais traços na figura inicial, que pode ser realizado com lápis, dobramentos ou recortes.

Porém, essa operação nem sempre é evidente e muito menos simples para a maioria das figuras que são utilizadas no ensino. Essa operação pode ser influenciada por diversos fatores que podem inibi-la ou dificultá-la ao invés de auxiliar nos procedimentos efetuados. Entretanto, buscar caminhos heurísticos nas figuras para resolver problemas, permitem tratamentos figurais além da percepção, operando nelas a apreensão operatória.

A reconfiguração serve, muitas vezes, para validar as demonstrações e cálculos que envolvem áreas de figuras planas, principalmente quando se faz uso de materiais manipuláveis com possibilidades heurísticas em uma figura. Para isso, deve-se transpor a apreensão perceptiva que possui a posição central e função de identificação. Essa apreensão é caracterizada pela identificação feita por meio do contorno das figuras.

O procedimento de exploração heurística em uma figura geométrica articulada com a linguagem e a visualização em atividades de áreas contribui para a aprendizagem desse conceito e superação de dificuldades, visto que as figuras proporcionam tratamentos de modo a achar caminhos para descobrir sua área, ou seja, atribuir a figura a sua função heurística.

Nas operações de reconfiguração, com as subfiguras obtidas pela decomposição pretendemos formar uma nova figura com área conhecida ou que seja mais fácil de calcular. Neste sentido, estamos interessados em achar caminhos na figura para determinar sua área, obtendo com esses tratamentos seu papel heurístico.

Pelo fato de a percepção ter um papel de destaque frente às figuras geométricas, trataremos juntamente com a *apreensão operatória* o *olhar inventor*. Este olhar, caracterizado por Duval (2005), é um olhar não icônico que exige desconstruir as formas visualmente reconhecidas. Isso exige desconstruir visualmente as formas que se apresentam num primeiro olhar, para obter a reconfiguração de uma figura inicial para o cálculo de áreas no Ensino Fundamental.

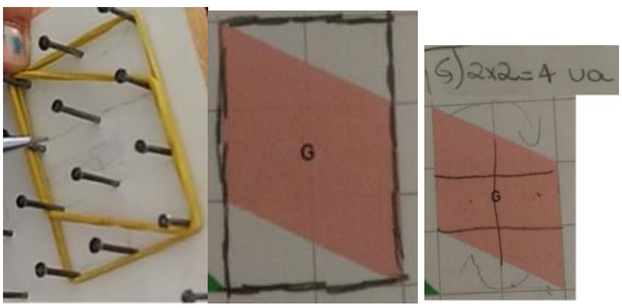
Com isso, para resolver um problema, adicionam-se traços na figura dada, na tentativa de descobrir um procedimento de resolução por meio de operações e modificações feitas sobre ela. Duval (2005) exemplifica esse olhar com a atividade de dividir um triângulo em outros dois triângulos e com esses formar um paralelogramo. Essa forma de ver, para Duval (2005, p.7), exige "uma DESCONSTRUÇÃO VISUAL das formas perceptivas elementares que são necessárias à primeira vista" (tradução nossa, grifo do autor).

O olhar inventor requer uma desconstrução na figura. Isso para Duval (2005) é uma questão crucial para a aprendizagem geométrica de áreas de figuras planas e precisa ser considerado nas atividades de modo que favoreça esse olhar, visto que "O conhecimento não é o mesmo conforme o olhar que um estudante encontrou ser capaz ou incapaz, de mobilizar, na presença de uma mesma figura" (DUVAL, 2005, p.7, tradução nossa).

A seguir apresentamos alguns resultados com este aporte teórico de Duval no estudo de Arinos (2018). Nesta atividade (Figura 1) pode-se perceber um forte vínculo que a apreensão perceptiva e discursiva exercem sobre as figuras. A visualização possui um papel de destaque e não exige do discente nenhum conhecimento matemático, no entanto, comanda a apreensão operatória. É o que veremos a seguir.

Heurística, apreensão operatória e olhar inventor para a aprendizagem de áreas

A questão propunha calcular a área das figuras de duas maneiras diferentes, uma fazendo uso de fórmulas e outra sem utilizá-las. Com o objetivo de utilizar mais de um registro[37] para validar a resposta. Assim:



Nós fizemos um quadrado. A gente fez também um retângulo com seis unidades de área. Daí seis menos dois dá quatro. Daí a gente fez base vezes a altura, a base é dois e a altura também é dois, que ficou igual a quatro unidades de área.

Figura 1 – Representação na malha e no geoplano
Fonte: Arinos (2018, p. 206)

Nessa resolução, percebe-se o uso da reconfiguração como um procedimento para determinar a área desse paralelogramo. Isso pode ser visto por meio da adição dos traços à lápis no paralelogramo. Essa adição dos traços requer uma desconstrução dimensional nessa figura ($2D \rightarrow 0D \rightarrow 1D \rightarrow 2D$), para isso tem-se que mudar o olhar, olha-se para o adimensional (o ponto), para após traçar os segmentos (unidimensionais), obtendo assim três figuras bidimensionais que são: o retângulo e dois triângulos equiláteros. Assim, decompõe-se o

[37] Trata-se dos Registros de Representação Semiótica proposto por Duval (2005, 2011, 2012, 2012b). Não o detalharemos neste estudo.

paralelogramo em três figuras para com estas compor o quadrado. Neste aplica-se a fórmula algébrica, esse procedimento exige desconstruir o quadrado em segmentos $(2D \rightarrow 1D)$, que são procedimentos de “ver” essenciais para a aprendizagem da geometria (DUVAL, 2005, 2011).

As formas 1D/2D presentes no paralelogramo são identificadas por meio do olhar inventor. Perceptivelmente o paralelogramo se impõe mais facilmente ao nosso olhar que essas desconstruções dimensionais. Essas desconstruções requerem o olhar não icônico de inventor, que é “uma abordagem que vai contra todos os processos de organização e de reconhecimento perceptivo das formas” (DUVAL, 2005, p. 16).

Para Duval (2005), esses olhares devem ser considerados para a aprendizagem geométrica, pois o modo como vemos as figuras depende da desconstrução dimensional que operamos sobre elas. São essas operações intermediárias que concedem ao paralelogramo sua produtividade heurística. Nesse caso os alunos compreenderam também por meio dessas operações e tratamentos realizados, que o quadrado e o paralelogramo possuem áreas iguais.

O discurso, nesse protocolo, serviu para justificar os tratamentos figurais realizados sobre o paralelogramo. A operação de reconfiguração se apoiou na percepção, que serviu de controle para aceitar os procedimentos realizados. A apreensão operatória e o olhar inventor permitiram compreender a razão de ser da fórmula algébrica do quadrado. A operação de reconfiguração, com invariância de área, tornou o cálculo da área do paralelogramo mais simples. À visualização e a linguagem em geometria contribuíram para essa exploração heurística.

Quando os alunos contornaram o paralelogramo por um retângulo[38] (Figura 1), eles realizaram o procedimento de mergulhar essa figura em um retângulo (DUVAL, 2005, 2011). Essa apreensão operatória possui um forte vínculo com a visualização, com a linguagem e com a apreensão perceptiva. A percepção conduziu os alunos a contornar o paralelogramo pelo retângulo. Em seguida eles subtraíram da área deste a área dos dois triângulos, resultando na área do paralelogramo.

[38] Pode ser visto na malha e no geoplano (Figura 1). O geoplano é uma prancha de madeira ou plástico normalmente quadrangular com pregos ou metais dispostos na sua superfície em quadrados que permite a construção de polígonos com elásticos do tipo daqueles de amarrar dinheiro e o aprofundamento de conceitos geométricos como o de áreas de figuras planas.

O discurso e o mergulhamento[39] foram influenciados pela posição do paralelogramo na malha que é uma das primeiras impressões que se tem acerca dessa figura. Essa percepção nas figuras geométricas, que é individual, precisa ser considerada quando se objetiva a aprendizagem da geometria.

Esse procedimento de desenhar o retângulo "ensina a ver" em geometria, pois lança mão dos olhares desenvolvidos por Duval (2005)[40]. Para isso os alunos desenvolveram a produtividade heurística, fazendo aparecer o retângulo que o olho não vê à primeira vista. Esses tratamentos efetuados, constituídos pela heurística, combinam operações que não são puramente perceptíveis, precisam da linguagem, do olhar inventor no paralelogramo e do mergulhamento.

A apreensão operatória e o olhar inventor, Duval (2005, 2012b), no paralelogramo permitiram que os alunos calculassem a área dessa figura por fora, retirando da área do retângulo as áreas dos dois triângulos, e, por dentro pelo processo de decomposição e reconfiguração, quer contando os quadradinhos do interior do quadrado ou aplicando neste a fórmula algébrica. Destacando que a malha contribuiu para a realização desses tratamentos figurais. Quando multiplicam "$2 \times 2 = 4$" os alunos desconstroem o quadrado em segmentos $(2D \rightarrow 1D)$.

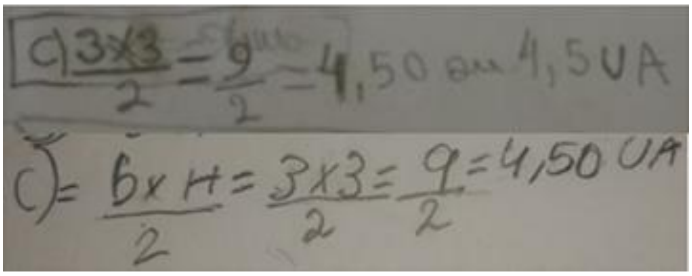
O discurso dos alunos para determinar a área do triângulo verde (Figura 2) mostra que os alunos construíram o triângulo no geoplano, isso exigiu que eles o desconstruíssem dimensionalmente $(0D \rightarrow 1D \rightarrow 2D)$. Esse procedimento requer a visualização não icônica articulada com a apreensão discursiva sobre esse triângulo que é uma para a aprendizagem geométrica. O olhar construtor[41] e a heurística nesse triângulo permitiu que os alunos o mergulhassem em um quadrado. Esse procedimento consistiu em adicionar traços no triângulo, mergulhando-o em um quadrado. Esses traços são, para Duval (2005), "*traços intermediários*" ou "*traços suportes*" que propiciam a exploração heurística nas figuras, a fim de descobrir sua área por meio desses procedimentos. Representar o triângulo no geoplano serviu de suporte

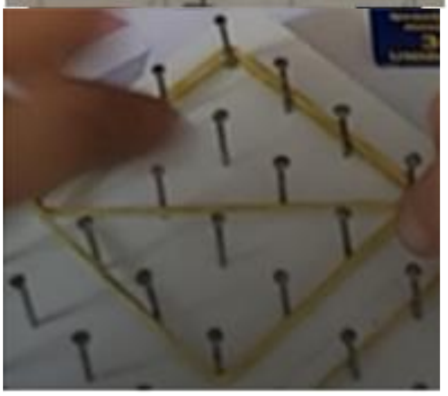
[39] O mergulhamento proposto por Duval é outro tipo de tratamento figural que consiste em enquadrar a figura inicial em outra que a contenha e que permita o cálculo de sua área. Neste caso se procede a retirada da(s) área(s) das subfigura(s) que exceda(m) a área da figura inicial (obtidas por procedimentos de decomposição). Restando a área da figura solicitada.

[40] Estamos considerando neste artigo o olhar inventor, porém existe ainda o olhar *botanista*, o *agrimensor* e o *construtor* (DUVAL, 2005).

[41] É requisitado quando se usam instrumentos para construção de figuras geométricas.

para os raciocínios elaborados e de controle, os quais justificam sua área por meio dos tratamentos figurais e cálculos numéricos realizados.





Aluna 10: A gente usou o geoplano também! Colocou um quadrado em volta dele (no geoplano à esquerda). E daí contamos quanto de área ele tinha. Um, dois, três,... Que deu nove. Então a gente dividiu nove por dois que deu quatro vírgula cinquenta.
Aluno 01: A gente fez o quadrado inteiro e cortou ele no meio que deu quatro vírgula cinquente!
Pesquisadora: E vocês fizeram como?
Aluna 06: Se aqui tem nove (no geoplano), a metade de nove é quatro e meio, daí, a área do triângulo é quatro e meio. Daí aqui (fórmula algébrica na folha) eu fiz três vezes três dividido por dois, que deu nove dividido por dois, que deu quatro e meio unidades de área.

Figura 2 – Representações do triângulo na malha, no geoplano e simbólica
Fonte: Arinos (2018, p. 198)

Quando explicam, no discurso, a medida do lado do quadrado ocorre uma mudança de olhar ($2D \rightarrow 1D$), que é uma desconstrução dimensional, que foi significativa para determinar a área do triângulo.

A representação do triângulo no geoplano permitiu sua visualização em posições diferentes, isso contribuiu para realizar a operação de reconfiguração, no caso, decompondo o quadrado em dois triângulos verdes.

Considerações e perspectivas

A articulação da visualização com a heurística no paralelogramo, por meio de tratamentos figurais, permitiu reconfigurá-lo em um quadrado, cuja área foi mais fácil de calcular. Essa apreensão operatória possibilitou determinar sua área, viabilizando outra alternativa de resolver essa atividade sem utilizar a fórmula algébrica. Observou-se que os alunos aplicaram a fórmula para o quadrado e não para o paralelogramo.

Os alunos tiveram uma maior desenvoltura quanto ao seu pensar, raciocinar e olhar para as figuras em geometria quando determinaram a área das figuras com cálculos diferentes, principalmente pela exploração heurística. Além disso, dependendo de como as representavam, tinham a possibilidade de as visualizarem em posições diferentes, o que contribuiu para a operação de reconfiguração por ser uma prática dos movimentos efetuados em uma figura. Antevendo alguns tratamentos figurais, que possibilitaram outras informações visuais obtidas como o mergulhamento.

Para a aprendizagem matemática percebemos que as operações de desconstrução dimensional e de reconfiguração permitiram tratamentos figurais nas figuras geométricas, o que evidenciou seu papel heurístico no cálculo de áreas. Assim, os discentes resolveram a atividade com percepções diferentes, dando mais veracidade aos procedimentos, não utilizando para tal apenas as fórmulas, eles encontraram outra maneira de solucionar a atividade, realizando a heurística na própria figura.

A operação de reconfiguração das figuras, com possibilidades heurísticas, contribuiu para validar os cálculos das suas áreas comparando os resultados encontrados com os obtidos pela fórmula algébrica. Para isso os estudantes tiveram que transpor a apreensão perceptiva, que é aquela em que às vezes eles se apegam mais nos processos de aprendizagem como nos alerta Duval (2012b, p.124, grifo do autor): *"estes não se dão conta de que uma figura deve ser olhada não mais do que através ou em função das propriedades, ou das condições formuladas como hipóteses"*.

Essa alternativa de ver as figuras em geometria, articulado com a linguagem e a apreensão operatória possui um papel relevante na aprendizagem de áreas de figuras planas e precisa ser considerado do ponto de vista cognitivo. Muitas vezes os alunos encontram dificuldades nos problemas de geometria porque encontram dificuldades em olhar para uma figura em uma dimensão inferior ao que é dada. Um exemplo disso é quando a mobilização da fórmula algébrica de área em uma figura, porque isso exige olhar para o ponto (0D), para o segmento (1D), para uma figura plana (2D) e permanecer em (2D).

Por outro lado, esse olhar "exige um longo treinamento, pois vai contra o funcionamento automático do reconhecimento perceptual das formas" (DUVAL, 2011, p. 88). É no espectro desses olhares que se coloca a aprendizagem da geometria e, portanto, plausível de ser considerado. Em nossa experimentação em sala de aula, observamos a importância da mobilização desses modos de "ver" em geometria nas atividades, pois há alunos que se dão conta de sua existência e por isso devem ser explorados.

Referências

ARINOS, C. R. M. **Um estudo de potencialidades das representações semióticas na aprendizagem de áreas de triângulos e quadriláteros por alunos do quinto e sexto anos do Ensino Fundamental**. 2018. 287 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, UFMS, Campo Grande, 2018.

DUVAL, R. Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. **Annales de Didactique e de Sciences Cognitives**, nº10 p.5 a 53, 2005.

________. **Ver e ensinar matemática de outra forma, entrar no modo matemático de pensar:** os registros de representações semióticas. Organização: Tânia M. M. Campos. Tradução: Marlene Alves Dias. Editora PROEM, 1ª Ed. São Paulo, 2011.

________. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **Revemat**, v.07, n.2, p. 266-297. Tradução: Méricles Thadeu Moretti. Florianópolis, 2012.

________. Abordagem cognitiva de problemas de Geometria em termos de congruência. **Revemat**, v. 07. n.1, p. 118 – 138. Tradução: Méricles Thadeu Moretti. Florianópolis, 2012b.

FLORES, C. R. & MORETTI, M. T. As figuras geométricas enquanto suporte para a aprendizagem em geometria: um estudo sobre a heurística e a reconfiguração. **Revemat**, v. 1, p. 5-13, UFSC, 2006.

MORETTI, M. T; BRANDT, C. F. Construção de um desenho metodológico de análise semiótica e cognitiva de problemas de geometria que envolvem figuras – Construction of a methodological Picture of semiotic and cognitive analysis concerning geometry problems involving figures. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo v. 17, n. 3, p. 597 – 616, 2015.